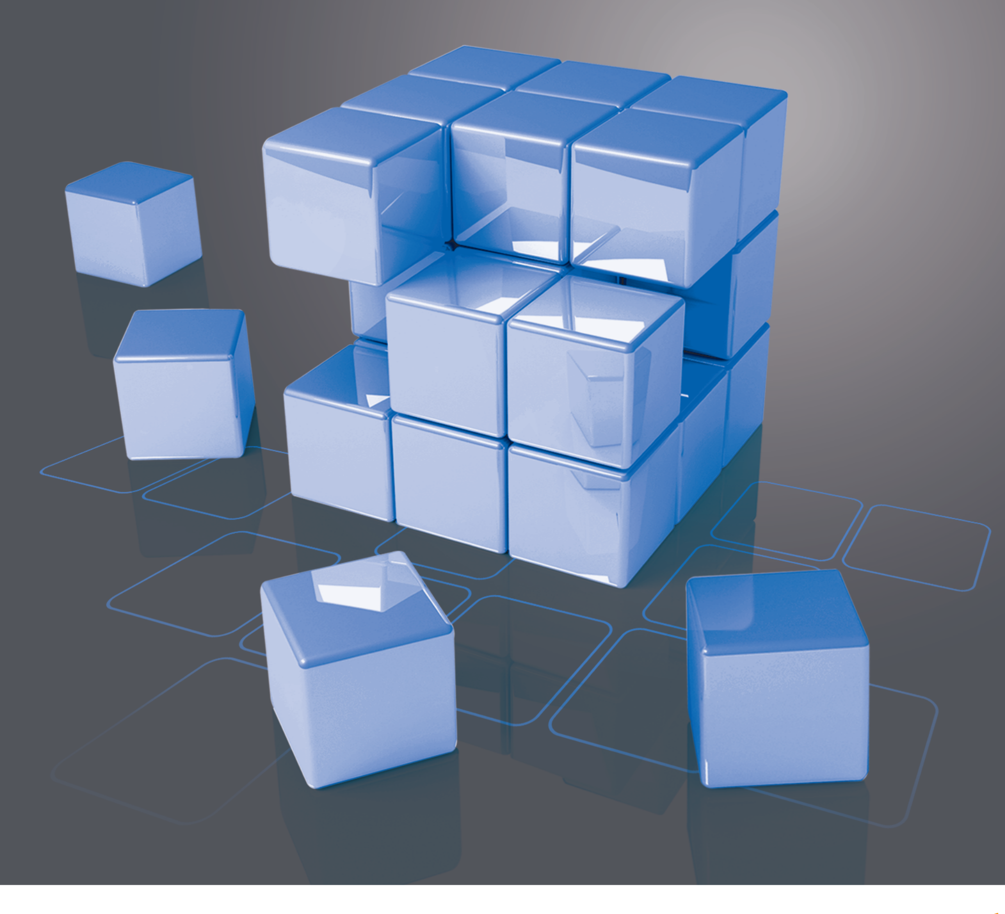
Trigonometría

Actividades

Quinto grado
de Secundaria









Trigonometría
Libro de actividades
Quinto grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Josué Dueñas Leyva / Christian Yovera López
Marcos Pianto Aguilar / Julio Julca Vega
Óscar Díaz Huamán / Kristian Huamán Ramos
Saby Camacho Martinez / Eder Gamarra Tiburcio
Jhonatan Peceros Tinco

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Lourdes Zambrano Ibarra / Natalia Mogollón Mayurí
Carol Clapés Hurtado / Roger Urbano Lima
Miguel Lancho Santiago

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición 2013
Tiraje: 15 000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.º 2013-12013
ISBN: 978-612-313-084-8
Registro de Proyecto Editorial N.º 31501001300694

Impreso en Perú / Printed in Peru

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, Lima, S.J.L.
RUC 10090984344

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.

La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.

El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.



Contenido


Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Unidad 1
Trigonometría
Trigonometría

RECUERDA

Arquímedis de Siracusa (287 a. C.-212 a. C.)

Nació y falleció en Siracusa (Sicilia). Las mayores contribuciones de Arquímedes fueron en Geometría. Desarrolló métodos anticipados de cálculo integral 2000 años antes de Newton y Leibniz. Arquímedes era un nativo en Siracusa, Sicilia y estudió en Alejandría, volviendo enseguida a su patria. Dedicó su genio a la Geometría, Mecánica, Física e Ingeniería. Su geometría es una geometría de la medida. Efectúa cuadraturas de superficies planas y curvas. Escribió varias obras, las cuales se han ordenado según la época en que fueron escritas:

1. Esfera y cilindro.
2. Medida del círculo.
3. Gnoides y esferoides.
4. Espirales.
5. Equilibrio de los planos y sus centros de gravedad.
6. Cuadratura de la parábola.
7. El arenario.
8. Cuerpos flotantes.
9. Los lemas.
10. El método.

Arquímedes demostró que la superficie de una esfera es cuatro veces la de uno de sus círculos máximos. Calculó áreas de zonas esféricas y el volumen de segmentos de una esfera. Demostró que "El área de un casquete esférico es igual a la superficie de un círculo que tiene por radio la recta que une el centro del casquete con un punto de la circunferencia basal". El problema al cual le atribuía gran importancia era el de demostrar que "El volumen de una esfera inscrita en un cilindro es igual a 2/3 del volumen del cilindro". Como posterior homenaje se colocó una esfera inscrita en un cilindro. Asimismo Arquímedes demostró que la superficie de esta esfera era también los 2/3 de la superficie del cilindro.

Es tal vez su trabajo sobre Medida del círculo el más interesante. Trata de la rectificación de la circunferencia y el área del círculo. Arquímedes es el primero que hizo un intento verdaderamente positivo sobre el cálculo de pi(π) asignándole un valor entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$.

El método que empleó consiste en calcular los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a un mismo círculo.

Reflexiona

- *El verdadero heroísmo consiste en ser superior a los males de la vida.*
- *El hombre superior busca en sí mismo todo lo que quiere; el hombre inferior lo busca en los demás.*
- *El hombre superior se cultiva a sí mismo para ganar respeto propio. Si no está contento con esto, se perfecciona para hacer felices a otros y si aún no está contento con eso, continúa perfeccionándose para conferir paz y prosperidad a todo el mundo.*
- *Tener un ideal es tener una razón para vivir. Es también un medio para vivir una vida más amplia y más elevada.*

¡Razona...!

¿Qué letra continúa en la siguiente sucesión?

L; U; M; D; M; T; J; ...

Halla: x + y + z

A) S B) O C) N
D) C E) D

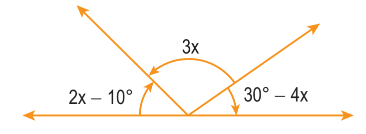


Aplicamos lo aprendido



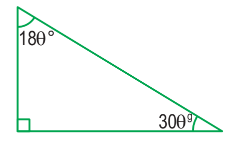
TEMA 1: SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

1 Del gráfico, calcula x.



A) 20° B) 30° C) 60°
D) 40° E) 50°

2 Del gráfico, calcula θ.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3 Calcula x, si se sabe que:

$$30x + \frac{\pi}{2}\text{ rad} = 3\left(90° - \frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$$

A) 5° B) 4° C) 7°
D) 6° E) 3°

4 Convierte a radianes: $\frac{810\,000''}{\pi}$

A) $\frac{4}{5}$ rad B) $\frac{3}{2}$ rad C) $\frac{2}{3}$ rad
D) $\frac{5}{4}$ rad E) $\frac{3}{7}$ rad

5 Se sabe que: $\frac{R+3}{C+S} = \frac{C+S}{C^2 - S^2}$

Si C, S y R son los sistemas de medidas para un mismo ángulo, halla la medida del ángulo en radianes.

A) 2 rad B) 16 rad C) 15 rad
D) 3 rad E) 8 rad

6 Dos ángulos complementarios miden $(3x)°$ y $\left(\frac{20x}{3}\right)^g$.
Halla el valor de x.

A) 15 B) 10 C) 9
D) 16 E) 18

7 La suma de las medidas de dos ángulos es $7\pi/20$ rad y su diferencia es 30^g. Calcula la medida del menor ángulo en el sistema centesimal.

A) 20^g B) 30^g C) 15^g
D) 15^g E) 8^g

8 Convierte 50^m a segundos sexagesimales.

A) 1730" B) 1800" C) 3600"
D) 1620" E) 1542"

9 Si se escribe 54^g en lugar de 54°, calcula el error cometido en radianes.

A) $\frac{3\pi}{100}$ rad B) $\frac{\pi}{180}$ rad C) $\frac{2\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{6}$ rad E) $\frac{\pi}{7}$ rad

10 Se cumple: $S = x^2 - 3x - 10$
$C = x^2 - 2x - 4$
Si S y C son los sistemas de medidas para un mismo ángulo ($x \in \mathbb{R}^+$), halla la medida del ángulo en radianes.

A) $\frac{3\pi}{10}$ rad B) $\frac{\pi}{9}$ rad C) $\frac{11\pi}{10}$ rad
D) 8π rad E) $\frac{7\pi}{3}$ rad

11 El producto de los números que expresan la medida de un ángulo en los sistemas inglés, francés y radial es $\frac{\pi}{6}$. Halla la medida del ángulo en grados sexagesimales.

A) 1° B) 2° C) 3°
D) 4° E) 5°

12 Al medir un ángulo se tiene la siguiente relación:
$\alpha = (179x + 185)° = (1 + x)\pi$ rad
Calcula el ángulo en el sistema francés.

A) 800^g B) 1500^g C) 1200^g
D) 1000^g E) 1600^g

13 Calcula el error en radianes al escribir 315° en lugar de 315^g.

A) $\frac{7\pi}{9}$ rad B) $\frac{7\pi}{13}$ rad C) $\frac{5\pi}{12}$ rad
D) $\frac{7\pi}{40}$ rad E) $\frac{3\pi}{7}$ rad

14 Si n es el número de radianes del ángulo 175°, calcula el número de radianes de M° si:
$M = \frac{1}{\pi}(36n - 30\pi)$

A) $\frac{35\pi}{36}$ B) $\frac{\pi}{36}$ C) $\frac{\pi}{35}$
D) $\frac{35\pi}{33}$ E) $\frac{30\pi}{37}$

Claves

1. D	3. E	5. B	7. A	9. A	11. C	13. D
2. B	4. D	6. B	8. D	10. C	12. C	14. B

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica la relación correcta:

A) $3° = 3^g = 3$ rad
B) $1° < 1^g < 1$ rad
C) 2 rad $> 2° > 2^g$
D) 1 rad $< 50°$
E) 1 rad $> 80°$

2. De la figura, analiza y calcula el valor de y.

A) 1140°
B) 1110°
C) 1120°
D) 1080°
E) 1000°

Razonamiento y demostración

3. Si x es la treintava parte de 4° e y es la treintaiseisava parte de 2^g.

Calcula: $M = \dfrac{3x + 4y}{5x - 4y}$

A) 1/7 B) 5/7 C) 5/7
D) 3/7 E) 9/7

4. Halla el error cometido, en radianes, si se escribe 36^g en lugar de escribir 36°.

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{50}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

5. Reduce: $\dfrac{\pi C + \pi S + 20R}{200R}$; si S, C y R son los sistemas de medidas para un mismo ángulo.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 3

6. Si S, C y R son los sistemas de medidas para un mismo ángulo. Calcula la medida de dicho ángulo en radianes, si además: $SCR = \dfrac{\pi}{162}$

A) $\frac{\pi}{180}$ B) $\frac{\pi}{90}$ C) $\frac{\pi}{30}$
D) $\frac{\pi}{15}$ E) $\frac{\pi}{8}$

7. Calcula la medida de un ángulo que cumple: $C^2 - S^2 = 76$.
Si S y C son los sistemas de medidas para un mismo ángulo.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{36}$ rad
D) $\frac{\pi}{20}$ rad E) $\frac{\pi}{9}$ rad

8. Calcula la medida de un ángulo en radianes, si se cumple:

$$\left(\frac{S}{9} - 1\right)\left(\frac{C}{10} + 1\right) = 15$$

Si S y C son los sistemas de medidas para un mismo ángulo.

A) π rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{5}$ rad
D) $\frac{\pi}{6}$ rad E) $\frac{\pi}{10}$ rad

9. Expresa $30{,}5^g$ en grados, minutos y segundos sexagesimales.

A) 27° 40' B) 28° 27' C) 27° 27'
D) 25° 25' E) 24° 20'

Resolución de problemas

10. Sea un ángulo α, cuya suma del n.° de minutos sexagesimales y n.° de minutos centesimales de α es igual a 1540, calcula α en radianes.

A) $\frac{\pi}{12}$ rad B) $\frac{\pi}{18}$ rad C) $\frac{\pi}{20}$ rad
D) $\frac{\pi}{10}$ rad E) $\frac{\pi}{15}$ rad

11. Un ángulo mide 130^g y su suplemento mide $(8n - 1)°$
Expresa n^g en radianes.

A) $\frac{\pi}{16}$ rad B) $\frac{\pi}{24}$ rad
C) $\frac{\pi}{48}$ rad D) $\frac{\pi}{50}$ rad
E) $\frac{\pi}{25}$ rad

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Se tienen los ángulos $\alpha = 786{,}75'$ y $\beta = 4217{,}09^m$; al expresarlos en grados, minutos y segundos tenemos:

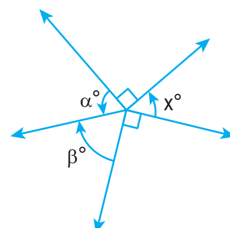
$\alpha = a°\, b'\, c''$ y $\beta = x^g\, y^m\, z^s$

Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. a y b son equivalentes.
II. b y z están en razón de 2 a 3.
III. c es menor que z.

A) VFF B) VFV C) FVV
D) VVV E) FVF

13. En la figura expresa el suplemento de x en términos de α y β



A) $\alpha° + \beta°$ B) $\alpha° - \beta°$
C) $180° + \alpha° - \beta°$ D) $180° + \beta° - \alpha°$
E) $180^g + \alpha^g + \beta°$

Razonamiento y demostración

14. Sabiendo que: $40° = \overline{aa}^g\, \overline{aa}^m\, \overline{aa}^s$; calcula: 2a y demuestra que:
$40° \approx \overline{aa}^g\, \overline{aa}^m\, \overline{aa}^s$

A) 45 B) 30 C) 90
D) 60 E) 8

15. Si S, C y R son los sistemas de medidas para un mismo ángulo.

$$\underbrace{C + S + C + S + \ldots}_{n \text{ términos}} \quad C + S = 3800\frac{R}{\pi}$$

Calcula 2n° en radianes.

A) $\frac{\pi}{9}$ rad B) $\frac{\pi}{18}$ rad C) $\frac{\pi}{16}$ rad
D) $\frac{\pi}{20}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

16. Sean A y B dos nuevos sistemas de medición angular. Si 160^A equivale a la tercera parte de una vuelta y 27^B equivale a un ángulo recto. ¿A cuántos grados B equivale 120^A?

A) 120^B B) 160^B C) 27^B
D) 10^B E) 90^B

Resolución de problemas

17. Se tienen tres ángulos tal que la suma del primero con el segundo es 20°; del segundo con el tercero es 40^g y del primero con el tercero es $5\pi/9$ rad. Halla el mayor de dichos ángulos.

A) 42° B) $\left(\frac{140}{9}\right)^g$ C) 240^g
D) $\frac{29\pi}{90}$ rad E) 190°

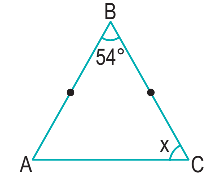
18. En un cierto ángulo se cumple que el número de segundos sexagesimales menos tres veces el número de minutos centesimales es igual a 29 400.
Calcula la medida del ángulo, en radianes.

A) $\frac{\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{10}$
D) $\frac{\pi}{30}$ E) $\frac{\pi}{15}$

19. Los ángulos de un triángulo isósceles miden $5x^g$ y $(4x + 5)°$. Halla la medida del tercer ángulo desigual en el sistema internacional.

A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{5}$ rad
D) $\frac{\pi}{2}$ rad E) $\frac{2\pi}{5}$ rad

20. En el triángulo mostrado, halla el valor de x.



A) 30^g B) 45^g C) 70^g
D) 55^g E) 60^g

21. Si: $\frac{3\pi}{13}\text{rad} = \overline{4a}°\overline{3b}'\overline{1c}''$.

Calcula: $J = (a + b)c$

A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 32

22. Si x e y representan los números de minutos centesimales y sexagesimales respectivamente de un ángulo, además se cumple que $x - y = 368$. ¿Cuál es la medida del ángulo en radianes?

A) $\frac{\pi}{25}$ rad B) $\frac{2\pi}{25}$ rad C) $\frac{\pi}{50}$ rad
D) $\frac{\pi}{30}$ rad E) $\frac{\pi}{16}$ rad

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Sean S, C y R los números que representan la medida del ángulo en el sistema sexagesimal, centesimal y radial respectivamente. Indica la expresión incorrecta.

A) $\frac{S-9}{9} = \frac{C-10}{10}$

B) $\frac{S+C}{19} = \frac{20R}{\pi}$

C) $\frac{C-R}{200-\pi} = \frac{C-S}{20}$

D) $\frac{S^2}{81} = \frac{2CR}{\pi}$

E) $\frac{SC}{90} = \frac{400R}{\pi^2}$

24. Se tiene un nuevo sistema de medida angular V. Si el número de grados en el nuevo sistema y el número de grados sexagesimales están en razón de 7 a 6. Encuentra la expresión incorrecta.

A) $V = \frac{210}{\pi}R$

B) $C = \frac{20}{21}V$

C) $m\angle 1 \text{ vuelta} = 420^V$

D) $36^V = 42°$

E) $7^V = 360'$

Razonamiento y demostración

25. Si S y C representan la medida de un mismo ángulo en el sistema sexagesimal y centesimal respectivamente, calcula:

$$E = \sqrt{\frac{\sqrt{C}+\sqrt{S}}{\sqrt{C}-\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{C}-\sqrt{S}}{\sqrt{C}+\sqrt{S}} - 2}$$

A) $\sqrt{23}$ B) $2\sqrt{17}$ C) 6
D) $3\sqrt{14}$ E) $3\sqrt{15}$

26. Reduce la siguiente expresión:

$$M = \left[\frac{11^g + 22^g + 33^g + \ldots + 770^g}{2\text{ rad} + 4\text{ rad} + 6\text{ rad} + \ldots + 140\text{ rad}}\right]\frac{400}{\pi}$$

A) 10 B) 11 C) 15
D) 22 E) 7

27. Calcula (a + b), sabiendo que:

$$\left(\frac{a^9 a^m}{a^m}\right)^9 \left(\frac{b^9 b^m}{b^m}\right)^m = a^9 b^m$$

Si: a > b

A) 103 B) 202 C) 101
D) 142 E) 200

28. Se idea dos nuevos sistemas de medidas angulares W y V. Sabiendo que la unidad de medida de W (1^W) es la quinta parte de la unidad de medida en el sistema sexagesimal; y que 20 grados V (20^V) es 10^g. Halla la relación entre los sistemas.

A) $1^W = 2^V$ B) $1^V = 2^W$
C) $1^V = 2{,}25^W$ D) $1^W = 1^V$
E) $\frac{1^W}{1^V} = 2$

29. Calcula:

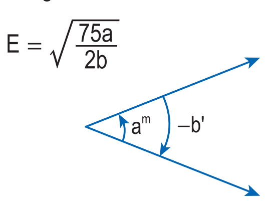
$$M = \frac{20x° + \left(\frac{3x}{5}\right)\pi \text{ rad} + 80x^g}{\frac{2x\pi}{9}\text{ rad} + (50^g)x + 15x°}$$

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 8

Resolución de problemas

30. Del gráfico, calcula:

$$E = \sqrt{\frac{75a}{2b}}$$



A) 5/6 B) 25/3 C) −25/3
D) −5/6 E) 1

31. Sabiendo que S, C y R son el número de grados sexagesimales, centesimales y radianes de un mismo ángulo, halla:

$$E = \sqrt[3]{6(\sqrt{3} - \sqrt{2})SCR}$$

Además:

$$\sqrt[3]{\frac{180}{S}} + \sqrt[3]{\frac{200}{C}} + \sqrt[3]{\frac{\pi}{R}} = 3$$

A) 10 B) 30 C) 50
D) 80 E) 60

Claves

NIVEL 1
1. C
2. B
3. E
4. C
5. B
6. A
7. B
8. C
9. C
10. C
11. E

NIVEL 2
12. E
13. B
14. E
15. A
16. C
17. D
18. A
19. D
20. C
21. D
22. B

NIVEL 3
23. E
24. D
25. C
26. B
27. A
28. C
29. C
30. B
31. E

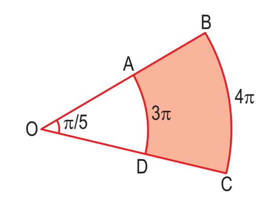




Aplicamos lo aprendido

TEMA 2: SECTOR CIRCULAR

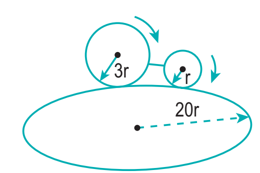
1 Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{35}{2}\pi$ B) $\frac{25}{2}\pi$ C) 16π

D) $\frac{18}{7}\pi$ E) $\frac{7}{3}\pi$

2 Halla el número de vueltas que dará cada rueda de la bicicleta cuando el ciclista haya dado 20 vueltas en la circunferencia.



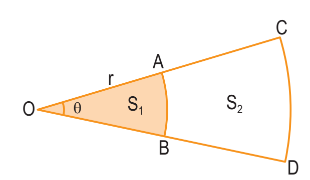
A) $\frac{400}{3}$ y 400 B) $\frac{300}{5}$ y 200

C) $\frac{500}{3}$ y 100 D) $\frac{400}{7}$ y 400

E) $\frac{250}{3}$ y 150

3 Si se cumple que: $2S_2 = 3S_1$

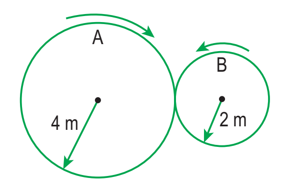
Calcula: $\frac{OA}{OD}$



A) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $2\sqrt{5}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

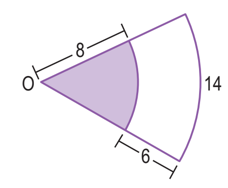
4 La figura muestra dos engranajes. Si la rueda mayor gira 18°, ¿qué ángulo gira la rueda menor?



A) 45° B) 40° C) 38°

D) 36° E) 37°

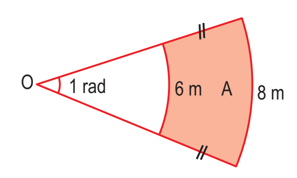
5 Halla el área del sector sombreado.



A) 45 B) 32 C) 28

D) 72 E) 27

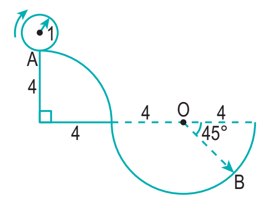
6 Halla el área de la región sombreada.



A) $12\ m^2$ B) $16\ m^2$ C) $14\ m^2$

D) $17\ m^2$ E) $15\ m^2$

7 Halla el número de vueltas que da la rueda al ir de A hasta B.

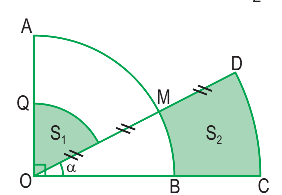


A) 15/3 B) 17/5 C) 21/8
D) 17/4 E) 19/8

8 Halla el perímetro de la región sombreada, siendo AOB y COD sectores circulares.

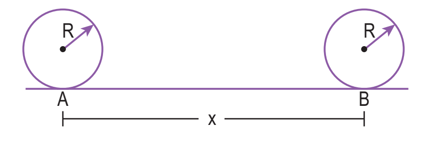
A) 13 B) 18 C) 6
D) 21 E)15

9 Del gráfico, AOB es un cuadrante, determina el valor de α, sabiendo además que: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2}$



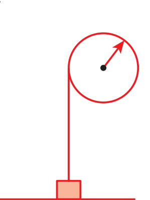
A) $\pi/6$ B) $\pi/7$ C) $3\pi/4$
D) $\pi/8$ E) $\pi/15$

10 Una rueda se desplaza sobre un plano horizontal de A hacia B, barriendo $49\pi/11$ rad. Calcula x, si $R = 0{,}5$; ($\pi = 22/7$).



A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

11 Del gráfico, ¿cuántas vueltas tiene que dar la polea de radio 1 m para que el bloque se eleve ($\sqrt{75} + \sqrt{50}$) m.
(Considera: $\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$)

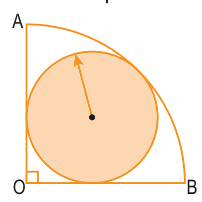


A) 2,5 B) 3 c) 4
D) 1 E) 5

12 Una bicicleta recorre 12π m sobre una superficie rectilínea. Calcula la suma del número de vueltas de sus dos ruedas con 0,6 m y 0,8 m de radio.

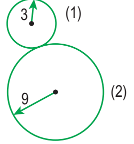
A) 16 B) 12 C) 17,5
D) 12,5 E) 14,2

13 Del gráfico, el área del círculo es igual a $(3 - 2\sqrt{2})\pi$ m^2, calcula el perímetro del sector circular AOB.



A) $\dfrac{4+\pi}{7}$m B) $\dfrac{2+\pi}{3}$m C) $\dfrac{4+\pi}{3}$m
D) $\dfrac{\pi+3}{2}$m E) $\dfrac{4+\pi}{2}$m

14 En el gráfico, ¿cuántas vueltas dará la rueda 1 hasta volver a su posición inicial por primera vez? La rueda 2 se mantiene estática y no gira.



A) 6 B) 4 C) 2
D) 7 E) 1

Claves

1. A 3. B 5. B 7. E 9. B 11. A 13. E
2. A 4. D 6. C 8. A 10. A 12. C 14. B

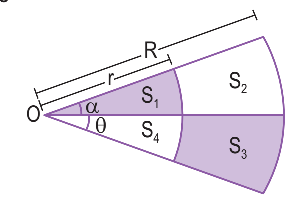
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Del gráfico:



Indica verdadero o falso:

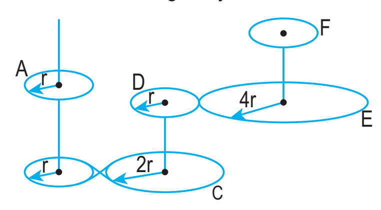
I. Si $S_3 = S_4$, entonces: $S_1 = S_2$

II. Si $S_1 = S_2$, entonces: $R = 3r$

III. Si $S_2 = 4S_4$, entonces: $4S_1 = S_2$

A) VFF B) FFV C) VFV
D) VVF E) VVV

2. Del sistema de engranajes:



Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El número de vueltas de C es igual al número de vueltas de E.

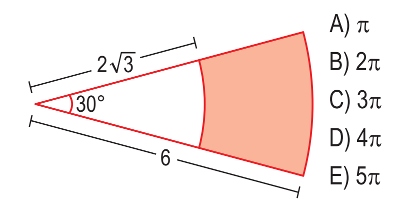
II. A y B dan un mismo número de vueltas.

III. Si B da 2 vueltas, D da 1 vuelta.

A) VVF B) FVF C) FFV
D) VFV E) FVV

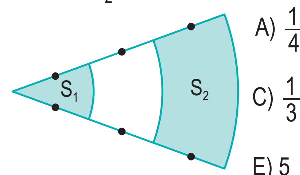
Razonamiento y demostración

3. Calcula el área de la región sombreada.



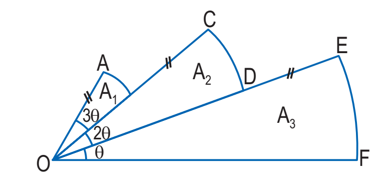
A) π
B) 2π
C) 3π
D) 4π
E) 5π

4. Calcula $\frac{S_1}{S_2}$ en el gráfico.



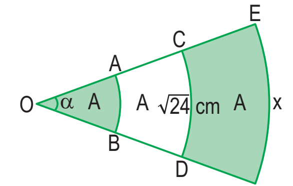
A) $\frac{1}{4}$ B) 4
C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{5}$
E) 5

5. Del gráfico calcula: $J = \dfrac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2}$



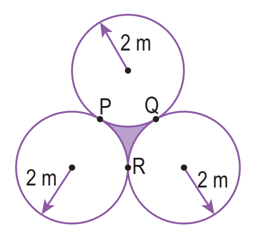
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. A partir del gráfico, calcula x.



A) 3 cm
B) 7 cm
C) 6 cm
D) 8 cm
E) 2 cm

7. Calcula el área de la región sombreada:



A) $4\sqrt{3}$ m^2 B) $(2\sqrt{3} - 6)$ m^2
C) $(\sqrt{3} + 4\pi)$ m^2 D) $(4\sqrt{3} + 2\pi)$ m^2
E) $(4\sqrt{3} - 2\pi)$ m^2

Resolución de problemas

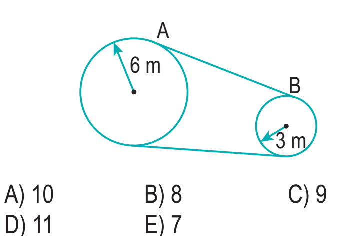
8. Sea un sector circular de radio 5 m y ángulo central 20^a, donde un grado **a** (1^a) es el triple de un grado en el sistema francés. Calcula el área de dicho sector circular.

A) $\frac{10\pi}{3}$ m^2 B) $\frac{15\pi}{4}$ m^2 C) $\frac{18\pi}{7}$ m^2
D) $\frac{12\pi}{5}$ m^2 E) $\frac{15\pi}{2}$ m^2

9. Dadas 3 ruedas A, B y C de radios 3 m, 4 m y 5 m respectivamente; si A y B recorren una distancia igual a 24 m. ¿Qué distancia recorre C si su número de vueltas es igual a la suma del número de vueltas de A y B?

A) 48 m B) 70 m C) 45 m
D) 80 m E) 90 m

10. Se tienen 2 ruedas unidas por una faja como se muestra en la figura. Si la rueda de mayor radio da (n – 4) vueltas y el de menor radio da n vueltas. Calcula (n + 3).



A) 10 B) 8 C) 9
D) 11 E) 7

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica cuáles de las proposiciones son verdaderas:

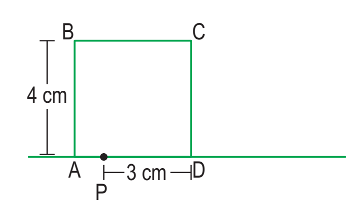
I. La razón de los radios de dos ruedas unidas por una banda es igual a la razón entre sus números de vueltas.

II. Si una rueda de radio r cm gira sin resbalar un ángulo igual a θ rad cuando se traslada de un punto a otro, la longitud que recorre es igual a θr cm.

III. En 2 poleas unidas por un eje se cumple que la razón de su número de vueltas es igual a 1.

A) Solo I B) II y III C) Solo III
D) I y III E) Solo II

12. De la figura:



El cuadrado gira sin resbalar, relaciona la longitud que recorre el punto P de acuerdo a las condiciones dadas.

I. Desde el instante mostrado hasta que C toca el suelo por primera vez — a) $\frac{5\pi}{2}$ cm

II. Si inicia con el lado CB en el suelo hasta que A toca el suelo por primera vez — b) $\frac{3\pi}{4}$ cm

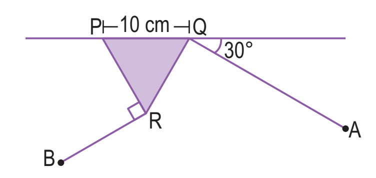
III. Desde el instante mostrado hasta que la diagonal $\overline{DB}$ sea perpendicular a la superficie por primera vez — c) $\frac{\sqrt{17}\,\pi}{2}$ cm

d) $\frac{3\pi}{2}$ cm

A) Id, IIa, IIIb B) Ia, IId, IIIb
C) Ic, IIb, IIIa D) Ia, IIb, IIId
E) Id, IIc, IIIb

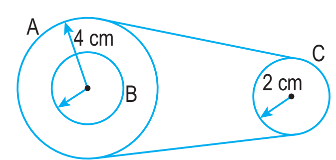
Razonamiento y demostración

13. En la figura se observa un péndulo en movimiento, si la longitud que recorre su extremo desde el punto A hasta el punto B es 13π cm, calcula la longitud del péndulo si además el triángulo PQR es equilátero.



A) 17 cm B) 20 cm C) 22 cm
D) 34 cm E) 44 cm

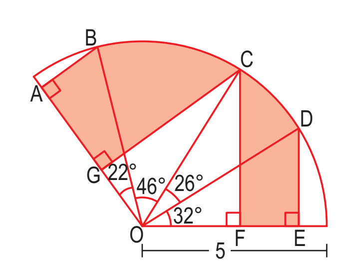
14. En el gráfico:



Calcula el ángulo que gira la rueda A si el número de vueltas de B y C suman 18.

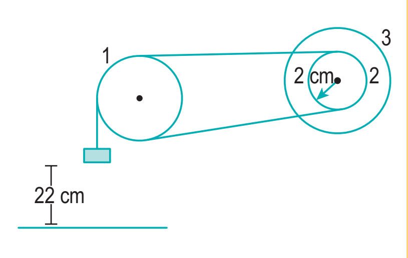
A) 18π rad B) 12π rad C) 24π rad
D) 6π rad E) π rad

15. Calcula el área de las regiones sombreadas



A) 12π u^2 B) 10π u^2 C) 18π u^2
D) 36π u^2 E) 5π u^2

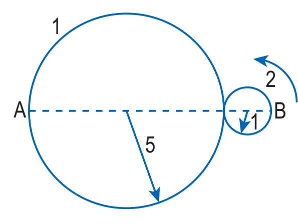
16. Calcula el número de vueltas que da la polea 3 en el instante que el bloque llega al piso. (Considera $\pi = \frac{22}{7}$)



A) 2,5 B) 3 C) 1,75
D) 3,5 E) 7

Resolución de problemas

17. ¿Cuál será la distancia entre los puntos A y B cuando el engranaje de menor radio gira 1,25 vueltas?



A) $2\sqrt{13}$ u B) 5 u C) 6 u
D) $4\sqrt{2}$ u E) 8 u

18. Los radios de las ruedas de una bicicleta están en la relación de 8 a 15, ¿cuál es el ángulo que habrá girado un punto cualquiera de la rueda mayor, cuando la rueda menor haya dado 3/8 de vuelta?

A) 120° B) 36° C) 105°
D) 72° E) 144°

19. Fuera de una cerca cuadrada de 5 m de lado, en uno de sus lados se ata una cabra con una cuerda de 3 m a 2 m de una de las esquinas. Si alrededor está cubierto de hierba. ¿En qué área puede pastar la cabra?

A) $\frac{19\pi}{4}$ m^2 B) $\frac{51\pi}{4}$ m^2 C) 9π m^2
D) $\frac{25\pi}{4}$ m^2 E) 12π m^2

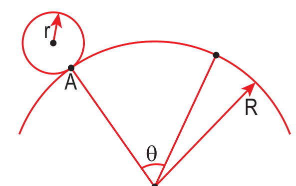
20. Qué distancia recorre un triciclo si el número de vueltas que dan dos de las ruedas de radio 6 m suman una cantidad que excede en 8 al número de vueltas que da la tercera rueda de radio 9 m. Considera una trayectoria rectilínea para el triciclo.

A) 72π m B) 36π m C) 63π m
D) 18π m E) 81π m

NIVEL 3

Comunicación matemática

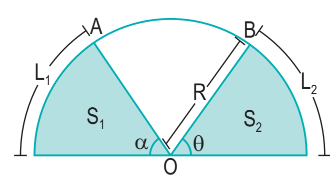
21. De la figura:



¿Qué datos son necesarios para calcular el número de vueltas que da la rueda desde A hasta B?

A) Los radios R y r.
B) El ángulo que gira la rueda de A hasta B.
C) El radio R y θ.
D) La longitud que recorre el centro de la rueda.
E) El ángulo que gira la rueda de A hasta B y el radio r.

22. En el gráfico:



Indica qué datos son necesarios para calcular el radio de la semicircunferencia.

I. La suma de S_1 y S_2 es igual a 3π m^2.

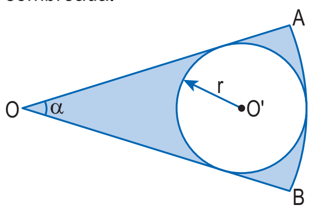
II. La diferencia entre L_1 y L_2 es igual a $\frac{2\pi}{5}$ m.

III. m ∠ AOB = $\frac{\pi}{6}$ rad

A) Solo I B) II y III C) I y II
D) I y III E) Faltan datos

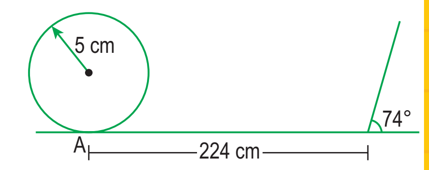
Razonamiento y demostración

23. Si $r^2 = \frac{8}{\pi}$ cm^2, calcula el área de la región sombreada.



A) 5 cm^2 B) 9 cm^2 C) 4 cm^2
D) 3 cm^2 E) 8 cm^2

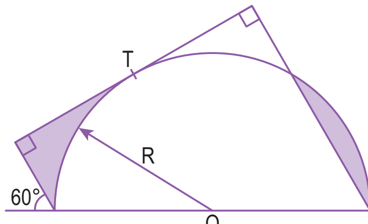
24. Del gráfico, la rueda gira sin resbalar.



Calcula el número de vueltas que da la rueda desde A hasta que choca con la superficie inclinada. (Considera $\pi = \frac{22}{7}$)

A) 6 B) 5 C) 11
B) 9 D) 7

25. Calcula el perímetro de la región sombreada. (T punto de tangencia).



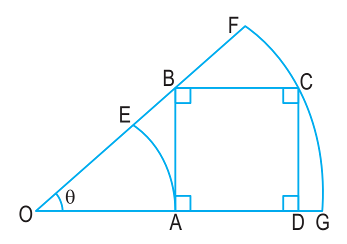
A) $\frac{(4\pi+3\sqrt{3})}{6}R$ B) $\frac{(9\pi+4+2\sqrt{3})}{6}R$

C) $\frac{(4\pi+9+3\sqrt{3})}{6}R$ D) $\frac{(3\pi+4+2\sqrt{3})}{6}R$

E) $\frac{(4\pi+8+2\sqrt{3})}{6}R$

Resolución de problemas

26. En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado. Calcula θ, si $L_{\widehat{GF}} = \sqrt{5}\, L_{\widehat{AE}}$; FOG y AOE, son sectores circulares.



A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{12}$

27. En un sector circular de área S, longitud de arco l y radio r se cumple:

$$\frac{5l^2}{\pi} + 11S = 3\pi r^2$$

Calcula el ángulo del sector circular.

A) $\frac{3\pi}{2}$ rad B) 60° C) 50^g

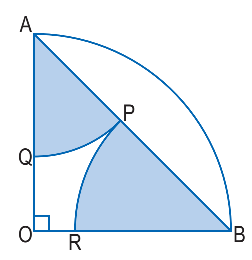
D) 72° E) $\frac{\pi}{2}$ rad

28. Sean dos ruedas conectadas por una faja. Cuando la faja gira se observa que la suma de ángulos que giran las ruedas es 486°. Calcula la diferencia entre el número de vueltas de ambas ruedas si sus radios son 2 u y 7 u.

A) 3 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{27}{20}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

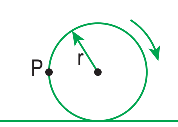
29. Del gráfico mostrado AOB es un cuarto de circunferencia. Las regiones PAQ y PBR son sectores circulares. Halla el área mínima de las regiones sombreadas si OA = OB = $\sqrt{2}$ u.



A) $\frac{\pi}{8}u^2$ B) $\frac{\pi}{4}u^2$ C) $\frac{\pi}{2}u^2$

D) $\pi\, u^2$ E) $\frac{3}{2}\pi\, u^2$

30. De la figura, el punto P ubicado en la rueda se encuentra a una altura igual al radio de la rueda. Si la rueda gira como se indica 2/3 de vuelta. ¿A qué altura se encuentra el punto P en ese instante?



A) $r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$ B) $2r\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $r + r\sqrt{3}$

D) $\frac{r}{2} + r\sqrt{3}$ E) $r\sqrt{2} + r$

31. Se ata una cabra en la parte exterior de una cerca cuadrada cuyo perímetro es igual a 16 m; si la cabra es atada en una de las esquinas de la cerca. ¿En qué área podrá pastar la cabra si la cuerda usada para atarla tiene 5 m de largo?

A) $\frac{75}{2}\pi\, m^2$ B) $37\pi\, m^2$ C) $38\pi\, m^2$

D) $\frac{78}{2}\pi\, m^2$ E) $\frac{77}{4}\pi\, m^2$

Claves

NIVEL 1
1. C
2. E
3. B
4. D
5. E
6. C
7. E
8. B
9. B
10. D

NIVEL 2
11. C
12. E
13. C
14. B
15. E
16. C
17. A
18. D
19. A
20. A

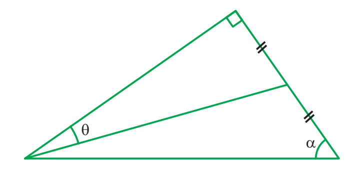
NIVEL 3
21. B
22. D
23. C
24. E
25. C
26. B
27. D
28. E
29. B
30. A
31. E



Aplicamos lo aprendido

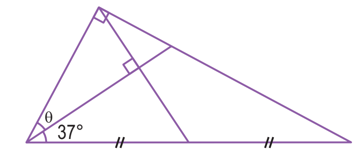
TEMA 3: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

1 En el gráfico: $\tan\alpha = 6$, calcula $\tan\theta$.



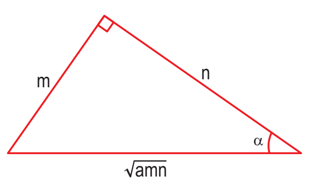
A) 1/6 B) 1/12 C) 1/5
D) 1/4 E) 1/10

2 Según el gráfico, calcula $\cot\theta$.



A) 3 B) 2,5 C) 4
D) 1,4 E) 2

3 Del gráfico, calcula: $L = \tan\alpha + \cot\alpha$

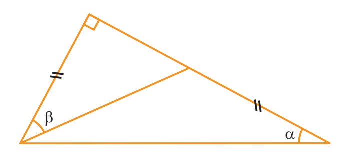


A) 1/a B) m C) a/2
D) a E) m^2

4 Si los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética, calcula la cosecante del menor ángulo agudo.

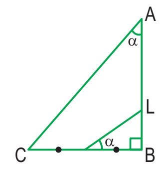
A) 2/5 B) 3/5 C) 5/3
D) 1/3 E) 5/2

5 Según el gráfico, calcula: $\cot\alpha - \tan\beta$



A) 1 B) 0 C) –2
D) 4 E) 2

6 En el gráfico, $AL = 3LB$. Calcula: $\cos\alpha$



A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ B) $\sqrt{\frac{4}{7}}$ C) $\sqrt{\frac{6}{7}}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

7 En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), reduce:

$K = \dfrac{\text{senA}}{\sec C} + \dfrac{\text{senC}}{\sec A}$

A) 1 B) 2 C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{ac}{b^2}$ E) $\dfrac{a-c}{b}$

8 Calcula: $\cot\alpha\cot\beta$

A) 1 B) 7 C) 8

D) 14 E) 10

9 Si: $\cot\theta = \cos16°\sec37°$; calcula $\sec\theta$.

A) $\dfrac{6}{5}$ B) $\dfrac{9}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{51}}{6}$

D) $\dfrac{\sqrt{61}}{6}$ E) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

10 Si β es un ángulo agudo, tal que: $\cos\beta = 0{,}6$; calcula: $K = \csc\beta + \cot\beta$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

11 En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), se traza la ceviana CN (N en $\overline{AB}$); tal que AN = 3NB.
Si: $m\angle NCB = \theta$ y $m\angle CAB = \phi$; calcula:
$P = \cot\theta\cot\phi$

A) 2 B) 3 C) 4

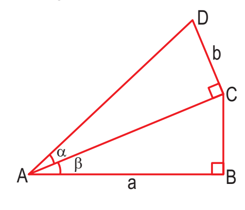
D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{2}$

12 Del gráfico, calcula: $\tan\theta\tan\alpha$

A) 2 B) 4 C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{8}$

13 Del gráfico, calcula: $P = \cos\beta\cot\alpha + \tan\alpha\sec\beta$



A) $\dfrac{a+b}{ab}$ B) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ C) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

D) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$ E) $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

14 Calcula: $\tan\alpha$

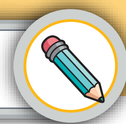
A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

Claves

1. B	3. D	5. A	7. A	9. D	11. C	13. B
2. E	4. C	6. A	8. D	10. B	12. D	14. C

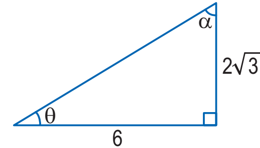
Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:



I. θ es la mitad de α. ( )

II. senθ es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ( )

III. α es igual a $\frac{\pi}{6}$ rad. ( )

A) VVF B) FFV C) VFF
D) VFV E) FVV

2. Para α y θ agudos, diferentes y complementarios, indica la alternativa correcta:

A) $\tan\alpha\tan(90° - \theta) = 1$

B) $\sec\alpha = \frac{1}{\text{sen}\theta}$

C) $\text{sen}\alpha = \cos(90° - \theta)$

D) $\frac{\sec\alpha}{\csc(90° - \theta)} = 1$

E) Todas

Razonamiento y demostración

3. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), reduce:

$K = \frac{\text{sen}A}{\sec C} + \frac{\text{sen}C}{\sec A}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{ac}{b^2}$ E) $\frac{a-c}{b}$

4. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°) reduce:

$J = (\sec^2C - \cot^2A)(\text{sen}^2C + \text{sen}^2A)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $a^2 - c^2$ E) $c^2 - a^2$

5. Si $\text{sen}\theta = \frac{1}{3}$, θ es agudo, calcula: cotθ

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $9\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{17}}{5}$

6. Si $\cos\beta = \frac{2}{5}$, β es agudo, calcula: senβ

A) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{\sqrt{17}}{5}$

7. Si $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, α es agudo, calcula:

$J = \sec\alpha\csc\alpha$

A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{13}{2}$ C) $\frac{13}{6}$
D) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Resolución de problemas

8. Si $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{4}$, ϕ es agudo, calcula:

$J = 13\csc^2\phi + 3\tan^2\phi$

A) 23 B) 25 C) 27
D) 29 E) 31

9. En un triángulo ABC (B = 90°), se traza la mediana AM (M en $\overline{BC}$); cumpliéndose que: m∠BAM = α; m∠ACB = θ.
Calcula: $Q = \tan\alpha\tan\theta$

A) 1 B) 2 C) 4
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

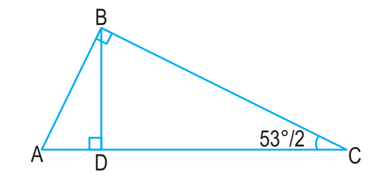
10. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), se traza la ceviana CN (N en $\overline{AB}$); tal que AN = 3NB.
Si: m∠NCB = θ y m∠CAB = ϕ; calcula:
$P = \cot\theta\cot\phi$

A) 2 B) 3 C) 4
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. En el triángulo rectángulo ABC:



Indica el valor de verdad:

I. $\frac{AB}{DC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ( )

II. $\frac{DC}{AD} = 2\sqrt{5}$ ( )

III. $\frac{BD}{AC} = \frac{2}{5}$ ( )

A) FFV B) FVF C) VFV
D) VVV E) FFF

12. Ordena según corresponda:

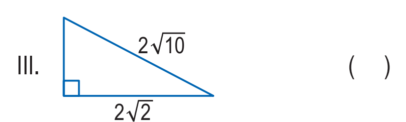
a) 8° y 82°

b) $\frac{53°}{2}$ y $\frac{127°}{2}$

c) $\frac{37°}{2}$ y $\frac{143°}{2}$

I. $2\sqrt{2}$ 20 ( )

II. $\sqrt{2}$ $2\sqrt{5}$ ( )

III. 

( )

A) cab B) bca C) abc
D) cba E) acb

Razonamiento y demostración

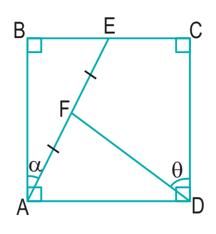
13. Si: $\tan(a + b + y)\tan(2y - a - b) = 1$, entonces el valor de **y** será:

A) 10° B) 30° C) 60°
D) 20° E) 40°

14. Si α y β ángulos agudos, tal que: senα = 1/3; cosβ = tanα; calcula:
$Q = \sqrt{2}\cot\alpha + \sqrt{7}\tan\beta$

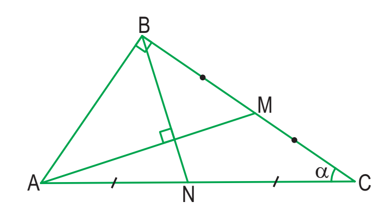
A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 11

15. Del gráfico, calcula: $Q = \tan\alpha + \tan\theta$
ABCD es un cuadrado.



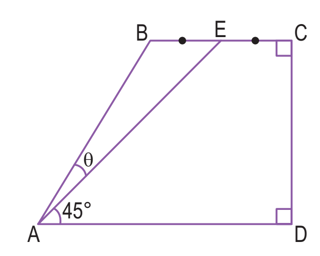
A) 1 B) 2 C) 4
D) 1,5 E) 2,5

16. Del gráfico, calcula: $\tan\alpha$



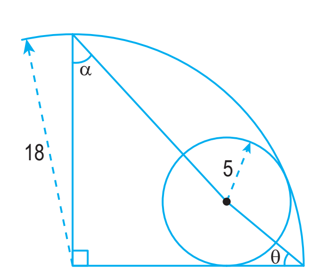
A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $2\sqrt{2}$

17. Calcula $\tan\theta$ si: $2BC = AD$



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

18. Del gráfico, halla: $\tan\theta + \cot\alpha$



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{23}{12}$ C) $\frac{5}{14}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{12}{23}$

Resolución de problemas

19. En un triángulo rectángulo ACB recto en C, se cumple: $3 + 4\tan\left(\frac{B}{2}\right) = 3\csc A$. Calcula el valor de:

$M = \operatorname{sen}B\sec A\cos B\csc A\tan B$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{8}{5}$

20. En un triángulo rectángulo, un cateto mide el triple que el otro cateto. Calcula la cosecante del mayor ángulo agudo del triángulo.

A) $\sqrt{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ C) $3\sqrt{10}$
D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ E) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

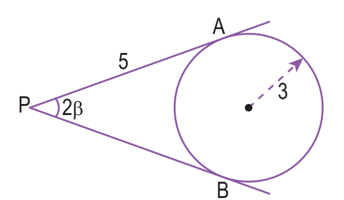
21. Si β es un ángulo agudo, tal que: $\cos\beta = 0{,}6$
Calcula: $K = \csc\beta + \cot\beta$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. En un triángulo rectángulo ABC ($B = 90°$), se cumple: $\tan A = 4\tan C$. Calcula: $\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

23. Del gráfico, calcula: $\operatorname{sen}\beta\cos\beta$



A) $\frac{5}{17}$ B) $\frac{15}{34}$ C) $\frac{12}{17}$
D) $\frac{6}{17}$ E) $\frac{6}{13}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Marca la alternativa correcta:

A) $\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sec\frac{127°}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$
C) $\operatorname{sen}\frac{143°}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ D) $\operatorname{sen}82° = \frac{\sqrt{10}}{3}$
E) $\cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

25. Se cumple que:
$2\cos^2\alpha + 2\tan^2\theta = 2\cos\alpha + 2\tan\theta - 1$,
para α y θ ángulos agudos.

¿Qué afirmaciones son correctas?
I. La medida del ángulo α es igual a 45°.
II. La $\cot\theta$ es igual a la unidad.
III. La relación entre la medida de α y su complemento es de 1 a 2 respectivamente.

A) Solo I B) I y III C) II y III
D) Solo II E) Ninguna

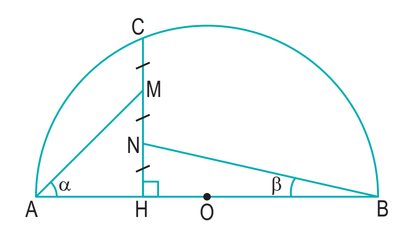
Razonamiento y demostración

26. En un triángulo rectángulo ACB (recto en C), halla:

$$K=\left[\frac{\cot\frac{B}{2}+1}{\cot\frac{A}{2}+1}\right]\tan B$$

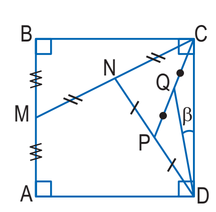
A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

27. Del gráfico, calcula: $\tan\alpha\tan\beta$



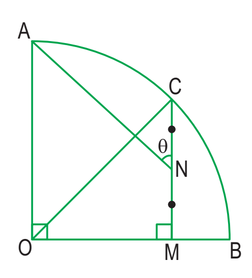
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

28. En el cuadrado ABCD, calcula: $\tan\beta$



A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{3}{11}$
D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{5}{11}$

29. Si $m\widehat{AC}=m\widehat{CB}$, calcula $\cot\theta$.



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}-1}{7}$ E) $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$

30. Si: $\tan\phi=\sqrt{2}$ (ϕ agudo)
Calcula:

$$M=\frac{\cos\phi\cot 60^\circ+\csc^2\phi\,\text{sen}^2 45^\circ}{\cot\phi\sec 45^\circ+\sec\phi\sec 30^\circ}\cdot\frac{\csc^2\phi}{\tan 30^\circ}$$

A) $12\sqrt{3}$ B) $\frac{13\sqrt{13}}{24}$ C) $\frac{13\sqrt{3}}{24}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ E) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

31. Si: $0^\circ<\alpha<45^\circ$ y $\cot 2\alpha=\frac{15}{8}$

Calcula: $E=(\sqrt{17}-4)\cot\frac{\alpha}{2}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

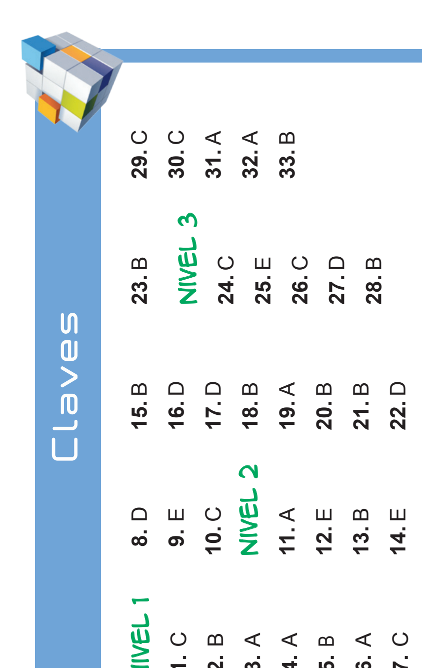
Resolución de problemas

32. En un triángulo rectángulo la suma de sus lados mayores es 27 y la diferencia de sus lados menores es 3. Calcula la tangente del menor ángulo agudo.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{3}$

33. En un triángulo acutángulo ABC, la tangente de A es igual a 2,4 el coseno de C es igual a 0,28. Si el perímetro de ABC es igual a 204 cm, calcula la longitud del mayor de los lados del triángulo.

A) 60 cm B) 78 cm C) 21 cm
D) 51 cm E) 75 cm


Claves

NIVEL 1
1. C
2. B
3. A
4. A
5. B
6. A
7. C
8. D
9. E
10. C

NIVEL 2
11. A
12. E
13. B
14. E
15. B
16. D
17. D
18. B
19. A
20. B
21. B
22. D
23. B

NIVEL 3
24. C
25. E
26. C
27. D
28. B
29. C
30. C
31. A
32. A
33. B

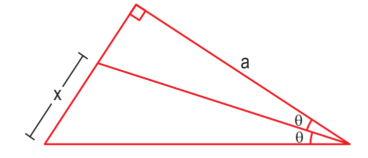


Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

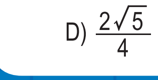
1 Del gráfico, calcula x en función de a y θ.



A) $a\,\text{sen}\theta\cos 2\theta$
B) $a\tan\theta\sec 2\theta$
C) $a\sec 2\theta\tan 2\theta$
D) $a\sec\theta\tan 2\theta$
E) $a\csc\theta\tan 2\theta$

2 En el gráfico, calcula BR.

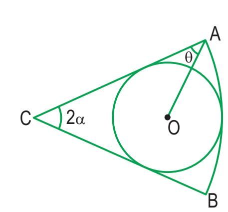
B, 37°, $\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, A, R, C

A) $5\sqrt{2}$
B) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$
C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$
D)  $\dfrac{2\sqrt{5}}{4}$
E) $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

3 Las bases de un trapecio isósceles son B y b (B > b). Si los lados no paralelos forman con la base mayor un ángulo cuya medida es θ, halla el área de la región trapecial.

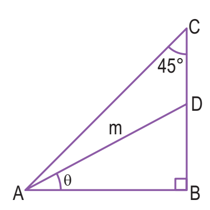
A) $\left(\dfrac{B+b}{2}\right)\tan\theta$
B) $\left(\dfrac{B^2+b^2}{4}\right)\tan\theta$
C) $\left(\dfrac{B^2-b^2}{4}\right)\tan\theta$
D) $\dfrac{Bb}{2}\text{sen}\theta$
E) $\dfrac{Bb}{2}\text{sen}\theta$

4 Del gráfico, calcula: $K=\dfrac{\cot\alpha+\cot\theta}{1+\csc\alpha}$



A) 1
B) 4
C) 3/4
D) 2
E) 1/2

5 En el gráfico mostrado, calcula CD en función de θ y m.



A) $m\,\text{sen}\theta$
B) $m(\sec\theta+\tan\theta)$
C) $m(\cos\theta+\text{sen}\theta)$
D) $m(\cos\theta-\text{sen}\theta)$
E) $m\cos\theta$

6 En el gráfico, calcula AM, si RL = RC y MC = a.

B, L, R, α, A, M, α, C

A) $a\sec 2\alpha$
B) $a\csc 2\alpha$
C) $a(\sec 2\alpha-1)$
D) $a(\sec 2\alpha+1)$
E) $a\tan 2\alpha$

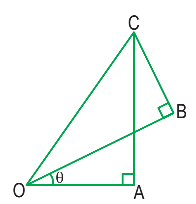
7 En un triángulo rectángulo ($m\angle B = 90°$) se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ la cual interseca a $\overline{AC}$ y a $\overline{AB}$ en los puntos H y D, respectivamente. Si $m\angle CAB = \theta$ y HD = L, calcula BC.

A) $2L\cos\theta$ B) $L\cos\theta$ C) $2L\tan\theta$
D) $2L\text{sen}\theta$ E) $L\text{sen}\theta$

8 Si ABCD es un rectángulo, calcula:
$P = \csc\alpha \,.\, \csc\beta \,.\, \sec x$ en función de x y θ.

A) $\text{sen}\theta\csc x$ B) $\csc x\sec\theta$ C) $\cot x\text{sen}\theta$
D) $\csc\theta\cos x$ E) $\csc x\csc\theta$

9 Según el gráfico, calcula OB, si OA = x y AC = y.

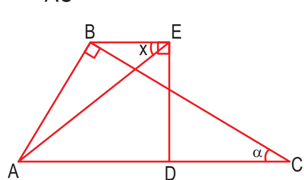


A) $x\cos\theta - y\text{sen}\theta$ B) $x\sec\theta - y\tan\theta$
C) $x\csc\theta + y\tan\theta$ D) $x\cos\theta + y\text{sen}\theta$
E) $x\sec\theta + y\text{sen}\theta$

10 Si ABCD es un cuadrado, calcula: $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan\alpha}$

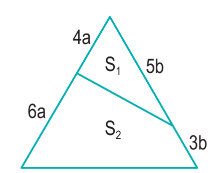
A) 5 B) 8 C) 2
D) 3 E) 4

11 Halla ntanx en términos de α.
Si: $\dfrac{AD}{AC} = n$



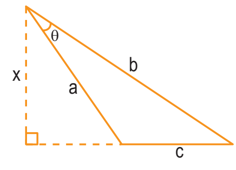
A) $\sec\alpha \,.\, \csc\alpha$ B) $\text{sen}\alpha\cos\alpha$
C) $\text{sen}\alpha\sec\alpha$ D) $\cos\alpha\ \csc\alpha$
E) $\text{sen}^2\alpha$

12 Siendo: S_1 y S_2 áreas, calcula: $\dfrac{S_2}{S_1}$



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

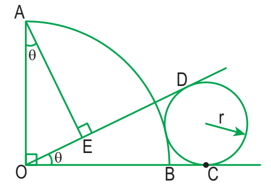
13 Del gráfico calcula x.



A) $\dfrac{ac}{b}\text{sen}\theta$ B) $\dfrac{bc}{a}\text{sen}\theta$ C) $\dfrac{ab}{c}\text{sen}\theta$

D) $abc\ \text{sen}\theta$ E) $\dfrac{bc}{a^2}\text{sen}\theta$

14 Si AOB es un sector circular, C y D puntos de tangencia. Halla AE en términos de "θ" y "r".



A) $r(\cos\theta/2 - 1)$ B) $r(\cot\theta/2 - 1)$
C) $(\cot\theta/2 - 1)\cos\theta$ D) $r(\csc\theta/2 - 1)$
E) $r(\csc\theta/2 - 1)\cos\theta$

Claves

1. B	3. C	5. D	7. A	9. D	11. B	13. C
2. C	4. A	6. A	8. E	10. C	12. C	14. E

Practiquemos



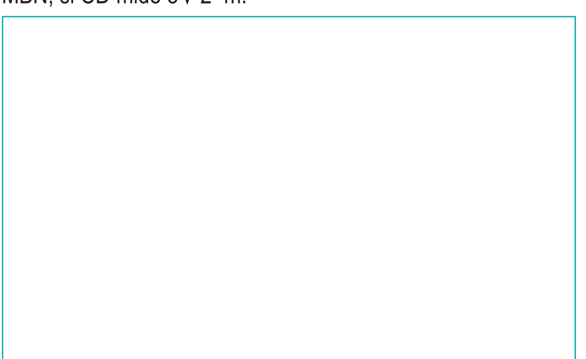
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica verdadero (V) o falso (F), en las siguientes proposiciones:

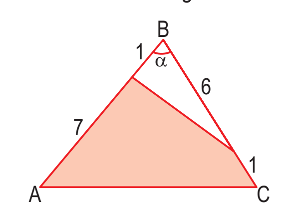
- En el triángulo rectángulo notable de 15° y 75°, si la medida de la hipotenusa es 8 u, entonces la medida de la altura relativa a la hipotenusa es 4 cm. ( )
- En un triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es menor que la medida de un cateto. ( )
- El teorema de Pitágoras solo de puede demostrar de 2 formas. ( )
- La mediana relativa a la hipotenusa mide 5 m, entonces la hipotenusa mide 10 m. ( )

2. Dibuja un cuadrado ABCD, en la diagonal AC ubica los puntos M y N, tal que, AM = MN = NC. Halla el área de la región triangular MBN, si CD mide $3\sqrt{2}$ m:



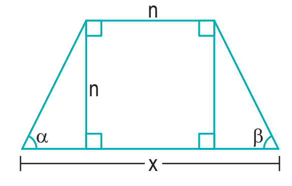
Razonamiento y demostración

3. De la figura, calcula el área de la región sombreada.



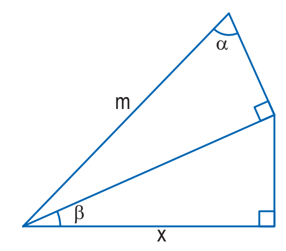
A) 20senα B) 24senα C) 25senα
D) 30senα E) 28senα

4. De la figura, halla x.



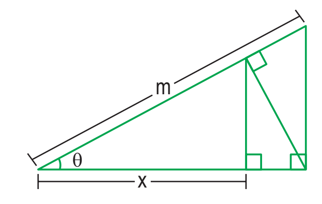
A) n(cotα + cotβ) B) n(cotα + cotβ + 1)
C) n(tanα + tanβ + 1) D) n(cotα + tanβ)
E) n(tanα + cotβ)

5. Según el gráfico, calcula x.



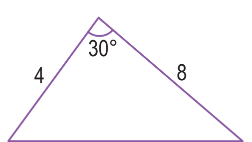
A) msenαsenβ B) msenαcosβ C) mcosαcosβ
D) mcosαsenβ E) mtanαcotβ

6. Según el gráfico, calcula x.



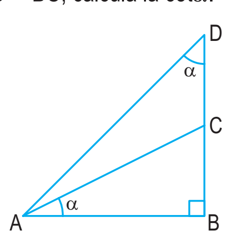
A) mcosθ B) msenθ C) $\text{mcos}^2\theta\text{sen}\theta$
D) $\text{mcos}^3\theta$ E) $\text{mcos}\theta\text{sen}^2\theta$

7. Halla el área del triángulo mostrado.



A) 14 B) 20 C) 8
D) 15 E) 16

8. En el gráfico, DC = BC, calcula la cotα.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}/3$ E) $\sqrt{2}$ / 2

Resolución de problemas

9. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide β y el cateto adyacente a este ángulo mide n. ¿Cuánto mide el área del triángulo?

A) $\frac{n^2}{2}\tan\beta$ B) $n^2\tan\beta$ C) $\frac{n^2}{2}\cot\beta$

D) $n^2\cot\beta$ E) $\frac{n^2}{2}\sec\beta$

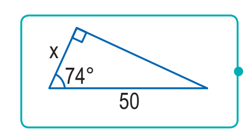
10. Halla el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de sus ángulos agudos mide θ y el cateto adyacente a este ángulo mide a.

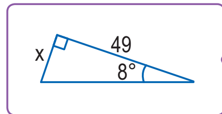
A) $a(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + 1)$ B) $a(\sec\theta + \tan\theta + 1)$
C) $a(\csc\theta + \cot\theta + 1)$ D) $a(\sec\theta + \tan\theta)$
E) $a(\csc\theta + \cot\theta)$

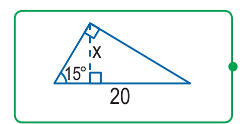
NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Relaciona según corresponda:





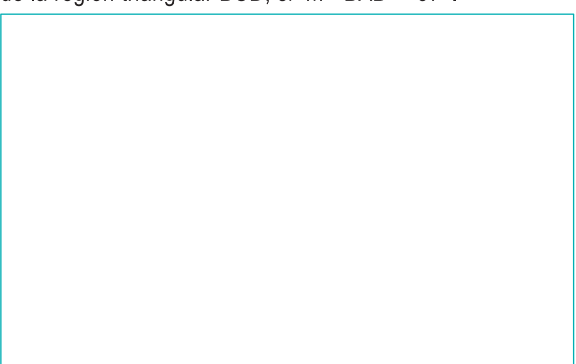


x = 5

x = 7

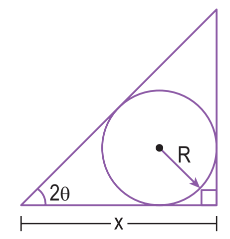
x = 14°

12. Dibuja un trapecio ABCD, donde la medida de la base menor BC mide 5 m. Construye el triángulo rectángulo ABD, recto en B, donde la medida de la hipotenusa AD = 10 m. Halla el área de la región triangular BCD, si $m\angle BAD = 37°$.



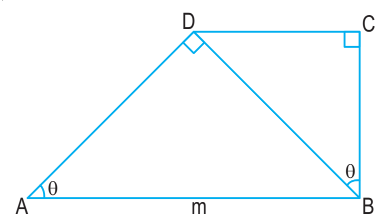
Razonamiento y demostración

13. Del gráfico, calcula x.



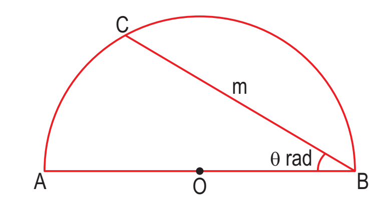
A) $R\cot\theta$ B) $R\tan\theta$ C) $R(\cot\theta + 1)$
D) $R(\tan\theta + 1)$ E) $R(\operatorname{sen}\theta + 1)$

14. Del gráfico, calcula CD.



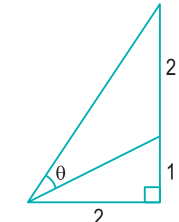
A) $m\operatorname{sen}\theta\tan\theta$ B) $m\cos\theta\cot\theta$ C) $m\cos^2\theta$
D) $m\operatorname{sen}^2\theta$ E) $m\operatorname{sen}\theta$

15. Halla la longitud del arco AC, en función de m y θ.



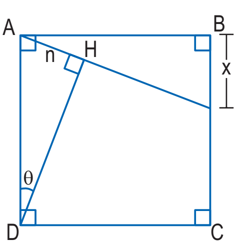
A) $\theta m\csc\theta$ B) $\theta m\cos\theta$ C) $\theta m\sec\theta$
D) $2\theta m\sec\theta$ E) $2\theta m\csc\theta$

16. Del gráfico, calcula $\operatorname{sen}\theta$.



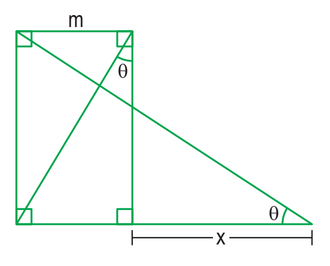
A) $\frac{1}{\sqrt{65}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{65}}$
C) $\frac{3}{\sqrt{65}}$ D) $\frac{4}{\sqrt{65}}$
E) $\frac{5}{\sqrt{65}}$

17. Del gráfico, halla x, si ABCD es un cuadrado.



A) $n\operatorname{sen}\theta$ B) $n\cos\theta$ C) $n\tan\theta\csc\theta$
D) $n\sec\csc\theta$ E) $n\cot\theta\csc\theta$

18. Del gráfico, halla x en términos de m y θ.



A) $m(\sec^2\theta - 1)$ B) $m(\csc^2\theta - 1)$ C) $m(\tan^2\theta - 1)$
D) $m(\cot^2\theta - 1)$ E) $m(\tan^2\theta + 2)$

Resolución de problemas

19. Calcula el lado de un cuadrado inscrito en un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide a y uno de los ángulos iguales mide θ.

A) $a(2\cot\theta + 1)$ B) $\dfrac{a}{2\text{ctg}\theta + 1}$

C) $\dfrac{2a}{\text{ctg}\theta + 1}$ D) $\dfrac{a}{\text{tg}\theta + 1}$

E) $a(3\cot\theta - 1)$

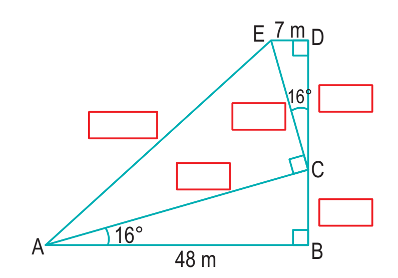
20. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide β y el cateto opuesto a dicho ángulo mide n, ¿cuál es el perímetro del triángulo?

A) $n(1 + \text{sen}\beta + \cos\beta)$
B) $n(1 + \tan\beta + \cot\beta)$
C) $n(1 + \sec\beta + \csc\beta)$
D) $n(1 + \cot\beta + \csc\beta)$
E) $n(1 + \sec\beta + \tan\beta)$

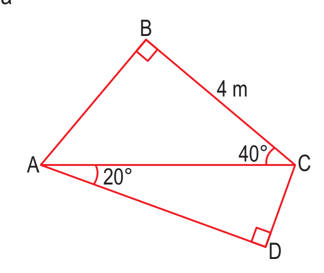
NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Observa el gráfico y luego completa:



22. Sea

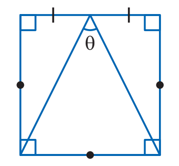


Indica verdadero (V) a falso (F), según corresponda.

- $AB = 4\tan 40°$ ( )
- $AD = 4\cos 20°\sec 40°$ ( )
- $CD = 4\sec 40°\text{sen}20°$ ( )
- $S_{\Delta ACD} = 16\sec^2 40° \,.\, \cos 20°$ ( )

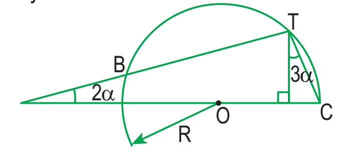
Razonamiento y demostración

23. Según el gráfico, calcula $\text{sen}\theta$.



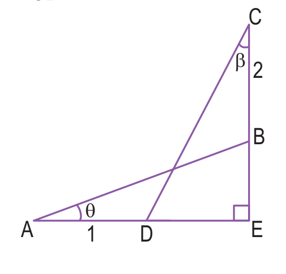
A) 1/2
B) 1/3
C) 4/5
D) 3/6
E) 1/5

24. De la figura determina BT, en términos de R y α.



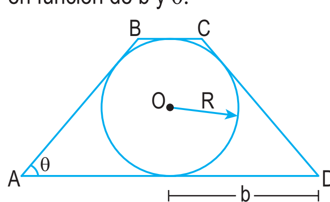
A) $2R\cos 4\alpha$ B) $R\cos 4\alpha\,\text{sen}2\alpha$
C) $2R\text{sen}2\alpha$ D) $R\text{sen}4\alpha$
E) $2R\cos\alpha\,\text{sen}\alpha$

25. De la figura, calcula: $E = \dfrac{\cos\theta - \text{sen}\beta}{\cos\beta - \text{sen}\theta}$; AB = CD



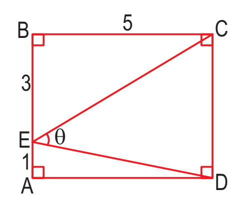
A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 2/5 E) 3/2

26. Si ABCD es un trapecio isósceles, halla R en función de b y θ.



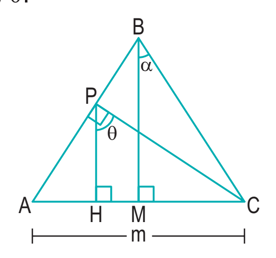
A) $b/(1 + \text{sen}\theta)$
B) $b\cos\theta/(1 + \text{sen}\theta)$
C) $b\text{sen}\theta/(1 + \sec\theta)$
D) $b\text{sen}\theta/(1 + \cos\theta)$
E) $b\cos\theta/(1 + \cos\theta)$

27. En la figura mostrada, calcula la $\csc\theta$.



A) $\sqrt{2,34}$
B) $\sqrt{3,24}$
C) $\sqrt{3,21}$
D) $\sqrt{2,24}$
E) $\sqrt{2,21}$

28. Del gráfico, calcula PB en términos de m, α y θ.



A) $m\cos\theta\tan(\theta - \alpha)$
B) $m\text{sen}\theta\tan(\theta - \alpha)$
C) $m\text{sen}\theta\cot(\alpha - \theta)$
D) $m\cos\theta\cot(\alpha - \theta)$
E) $m\sec\theta\tan(\theta - \alpha)$

Resolución de problemas

29. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) la hipotenusa es m y el $\angle A = \theta$. Halla el perímetro del triángulo.

A) $m(1 + \tan\theta + \cos\theta)$
B) $m(1 + \text{sen}\theta + \cos\theta)$
C) $m(1 + \sec\theta + \cos\theta)$
D) $m(1 + \sec\theta + \tan\theta)$
E) $m(1 + \csc\theta + \cot\theta)$

30. En un paralelogramo las distancias del punto de intersección de las diagonales a los lados no paralelos miden a y b. Sabiendo que uno de los ángulos del paralelogramo mide θ, determina el perímetro del paralelogramo.

A) $4(a + b)\csc\theta$ B) $4(a + b)\sec\theta$
C) $4(a + b)\tan\theta$ D) $4(a + b)\text{sen}\theta$
E) $4(a + b)\cos\theta$

Claves

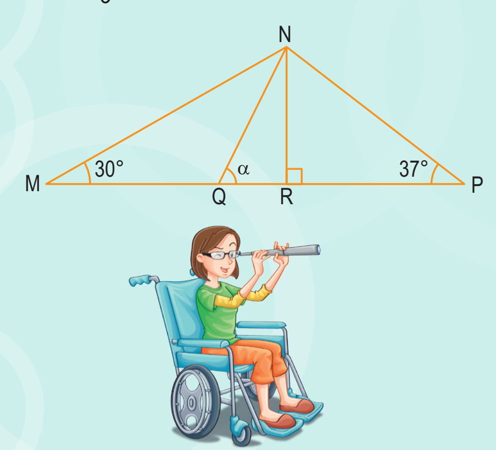
NIVEL 1
1.
2.
3. C
4. B
5. B
6. D
7. C
8. C
9. A
10. B

NIVEL 2
11.
12.
13. C
14. D
15. C
16. D
17. C
18. D
19. B
20. D

NIVEL 3
21.
22.
23. C
24. A
25. C
26. D
27. E
28. B
29. B
30. A

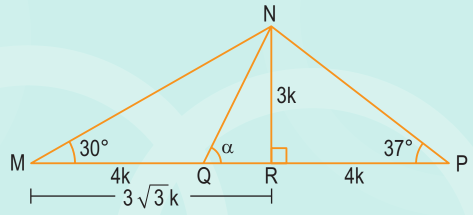
MARATÓN Matemática

Calcula $\cot\alpha + \frac{4}{3}$, si: MQ = RP



Resolución:

En el gráfico tenemos:

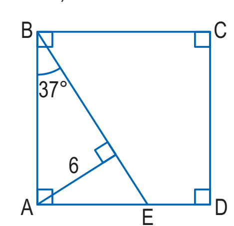


Nos piden: $\cot\alpha + \frac{4}{3} = \frac{(3\sqrt{3}-4)k}{3k} + \frac{4}{3}$

$\cot\alpha + \frac{4}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$

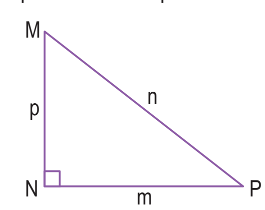
$\therefore\ \cot\alpha + \frac{4}{3} = \sqrt{3}$

1. Si ABCD es un cuadrado, calcula el valor de ED.



A) 4 B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

2. Del gráfico se cumple: n + m = 2p



Calcula: cosM

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Si $S = mx - n$ y $C = mx + n$ son las representaciones de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal. Halla el suplemento de dicho ángulo en radianes.

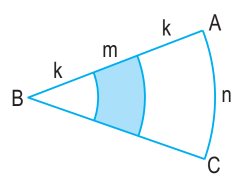
A) $\left(\frac{10+n}{10}\right)\pi$ rad B) $\left(\frac{10-n}{10}\right)\pi$ rad C) $\left(\frac{10+m}{10}\right)\pi$ rad

D) $\left(\frac{m+n}{10}\right)\pi$ rad E) $\left(\frac{m-n}{10}\right)\pi$ rad

4. Se tienen dos ángulos tal que la suma del número de grados sexagesimales del segundo con los minutos sexagesimales del primero, es 1845; y la diferencia entre $60/\pi$ veces el número de radianes del primero con la novena parte de grados sexagesimales del segundo, es 5. Calcula la medida del menor ángulo.

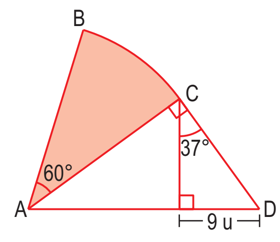
A) 45° B) 30° C) 60° D) 15° E) 75°

5. Si ABC es un sector circular con centro en B. Calcula el área del trapecio circular en función de m y n.



A) $\frac{m \cdot n}{2}$ B) 2m . n C) 4mn D) $\frac{m \cdot n}{4}$ E) $m - \frac{n}{2}$

6. Calcula el área de la región sombreada, si BAC es un sector circular.



A) $72\pi\ u^2$ B) $100\frac{\pi}{3}\ u^2$ C) $450\ \frac{\pi}{2}\ u^2$

D) $200\frac{\pi}{3}\ u^2$ E) $54\pi\ u^2$

7. Sean S y C las medidas de un ángulo en sexagesimales y centesimales respectivamente. Se cumple:

$2S - 18 = C + 30$

Halla la medida del ángulo en radianes.

A) $\frac{2\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{3\pi}{10}$ rad

D) $\frac{7\pi}{10}$ rad E) $\frac{3\pi}{5}$ rad

8. Las longitudes de un cateto y la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC son 24 y 25 respectivamente. Calcula la suma de la secante y la tangente del menor ángulo de dicho triángulo.

A) 24/25 B) 3/4 C) 4/3

D) 3/5 E) 4/5


Unidad 2
Trigonometría
Trigonometría

Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

1 Desde un punto en el suelo se observa la parte superior de un muro con un ángulo de elevación α, luego acercándose una distancia igual a la altura del muro, el nuevo ángulo de elevación con el que se observa su parte superior es θ.
Si $\tan\theta = 2$, calcula $\cot\alpha$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{7}{4}$

2 Javier observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 60°; al retroceder 20 m el ángulo de elevación es de 30°. Halla la distancia de separación final que hay entre el árbol y Javier.

A) 10 m B) 16 m C) 15 m
D) 20 m E) 30 m

3 Desde el pie de un edificio, el ángulo de elevación para observar la parte superior de una torre es θ. Subiendo a una altura h del edificio se observa ahora el punto anterior con un ángulo de elevación α. Halla la altura de la torre.

A) $\frac{h}{\cot\theta\tan\alpha}$ B) $\frac{h\cot\alpha}{\cot\alpha - \cot\theta}$
C) $\frac{h\cos\alpha}{1 - \mathrm{sen}\theta}$ D) $\frac{h}{1 - \cot\theta\tan\alpha}$
E) $\frac{h}{\cos\alpha + \mathrm{sen}\alpha}$

4 Una torre está al pie de una colina cuya inclinación respecto del plano horizontal es 10°. Desde un punto de la colina a 12 m de la altura respecto del plano horizontal se observa la torre bajo un ángulo de 55°. Halla la altura de la torre.
($\cot 10° = 5,67$)

A) 8,04 m B) 8,03 m C) 80,04 m
D) 80,20 m E) 82,5 m

5 Desde un punto en el suelo se observa lo alto de una torre con un ángulo de elevación θ; desde la mitad de la distancia, el ángulo de elevación es el complemento del anterior. Halla $\tan\theta$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{5}$

6 Desde un punto en tierra se observa la parte alta de un poste de 12 m de altura con un ángulo de elevación de 53°. Si nos acercamos 4 m, el nuevo ángulo de elevación será θ. Calcula $\sec\theta$.

A) 2,5 B) 3,6 C) 2,6
D) 3,5 E) 3,4

7 Desde dos puntos ubicados a un mismo lado de una torre, se divisa su parte más alta con ángulos de elevación de 37° y 45°. Calcula la tangente del ángulo de elevación con que se ve la parte alta de la torre desde el punto medio ubicado entre los dos primeros puntos de observación.

A) 2/7 B) 3/7 C) 4/7
D) 5/7 E) 6/7

8 Desde la base y la parte superior de una torre se observa la parte superior de un edificio con ángulos de elevación de 60° y 30°, respectivamente. Si la torre mide 16 m, calcula la altura del edificio.

A) $12\sqrt{3}$ m B) $24\sqrt{3}$ m C) $12\sqrt{6}$ m
D) $24\sqrt{2}$ m E) 24 m

9 Un alumno sale de su casa con destino al colegio, haciendo el siguiente recorrido: 100 m al norte; $200\sqrt{2}$ m al NE; luego 100 m al este y finalmente 150 m al sur, llegando a su destino. ¿A qué distancia de su casa se encuentra el colegio?

A) 150 m B) $150\sqrt{2}$ m C) $150\sqrt{5}$ m
D) $200\sqrt{5}$ m E) 200 m

10 Desde un punto salen dos autos en direcciones S40°O y E40°S, con velocidades de 15 y 20 km/h, respectivamente. Al cabo de 4 horas, ¿qué distancia separa a los autos?

A) 40 km B) 60 km C) 80 km
D) 100 km E) 120 km

11 Una persona observa lo alto de un árbol con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuánto debe retroceder para que observe el mismo punto anterior con un ángulo de elevación que sea el complemento del anterior? Considera la altura del árbol $5\sqrt{3}$ m y la estatura de la persona 1,73 m.
($\sqrt{3} = 1,73$)

A) 6 m B) 8 m C) 12 m
D) 10 m E) 9 m

12 Hay una estatua colocada sobre una columna. Los ángulos de elevación para la ama de la estatua y de la parte superior de la columna, vista desde un punto distante 13 m de la base de la columna son, respectivamente, 44° y 40°. Halla la altura de la estatua. Considera tan44° =0,97 y cot50° = 0,84

A) 1,79 m B) 10,82 m C) 1,59 m
D) 1,69 m E) 10,92 m

13 Desde la parte superior de un campanario los ángulos de depresión de la parte más alta y baja de un poste de 8 m de altura son 30° y 45°, respectivamente. ¿Cuál es la altura del campanario?

A) $4(3 + \sqrt{3})$ m B) $4(3 - \sqrt{3})$ m
C) $(4 - \sqrt{3})$ m D) $(4 + \sqrt{3})$ m
E) $4(\sqrt{3} - 1)$ m

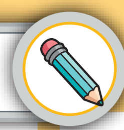
14 Desde la base y la parte superior de una torre se observa la parte superior de un edificio con ángulos de elevación de 60° y 30°, respectivamente. Si la torre mide 36 m, calcula la altura del edificio.

A) 18 m B) 36 m C) 54 m
D) 45 m E) 60 m

Claves

1. B	3. B	5. B	7. E	9. C	11. B	13. A
2. E	4. C	6. C	8. E	10. D	12. D	14. C

Practiquemos



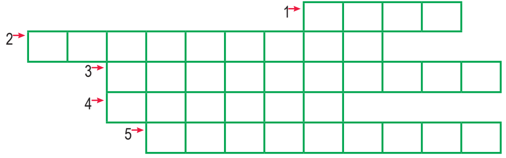
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama

Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Segunda letra del alfabeto griego.
2. Ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objetivo se encuentra por encima de la línea horizontal.
3. Línea paralela a la superficie que pasa por el ojo del observador.
4. Línea que une el ojo de un observador con el objeto que se observa.
5. Ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objetivo se encuentra por debajo de la línea horizontal.



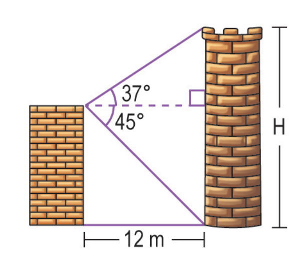
__________ (1815-1864): matemático inglés, que sentó las bases de la lógica Booleana.

2. Dibuja la dirección siguiente: $E\frac{1}{4}NE$

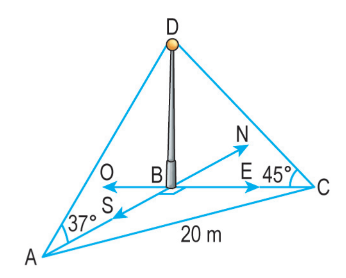


Razonamiento y demostración

3. Halla la altura H de la torre.



4. Halla la altura h del poste.



Resolución de problemas

5. Desde un punto en el suelo ubicado a 10 m de un poste; se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de 45°. ¿Cuál es la altura del poste?

A) 10 m B) 5 m C) 12 m
D) 20 m E) 8 m

6. Señala la medida del menor ángulo formado por las direcciones O20°S y E40°N.

A) 120° B) 130° C) 140°
D) 150° E) 160°

7. Pepe se encuentra al oeste de Daniel, a 40 m. Si ambos divisan a Sonia al N30°E y al N60°O, respectivamente, ¿cuál es la distancia entre Daniel y Sonia?

A) 38,6 m B) 36,6 m C) 34,6 m
D) 42,6 m E) 44,6 m

8. Señala la bisectriz del menor ángulo formado por las direcciones N10°O y E20°S.

A) E10°N B) E20°N C) E30°N
D) E40°N E) E50°N

9. Desde 2 puntos ubicados al norte y oeste de un poste, se ve su parte más alta con ángulos de elevación de 30° y 45° respectivamente. Si la distancia entre dichos puntos es 12 m, ¿cuál es la altura del poste?

A) 12 m B) 24 m C) 6 m
D) 18 m E) 9 m

10. Claudia sale de su casa y recorre 100 m al N37°E; luego 40 m al este y finalmente 30 m al sur, llegando a la casa de Andrea. ¿Cuál es la distancia entre la casa de Claudia y la de Andrea?

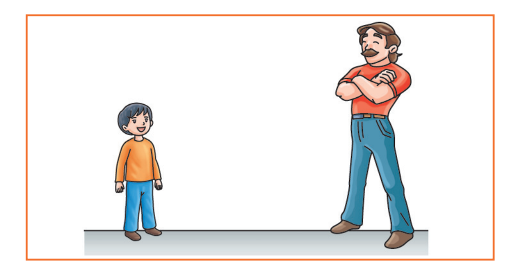
A) 50 m B) $50\sqrt{2}$ m C) $50\sqrt{5}$ m
D) $100\sqrt{2}$ m E) $70\sqrt{5}$ m

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Representa gráficamente el enunciado.

Un niño observa los ojos y pies de su padre, con ángulos de elevación y depresión α y β, respectivamente.



12. Completa el enunciado:

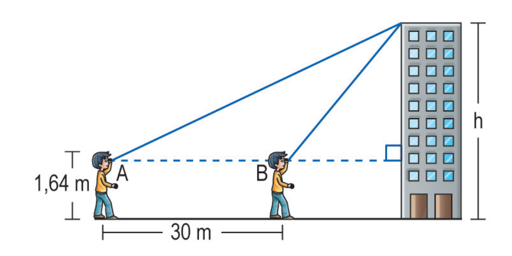
La ________ es la ________ que une el ojo de un ________ con un ________ que se observa.

Con las siguientes palabras:
A) línea recta
B) objeto
C) línea visual
D) observador

Razonamiento y demostración

13. Halla h.

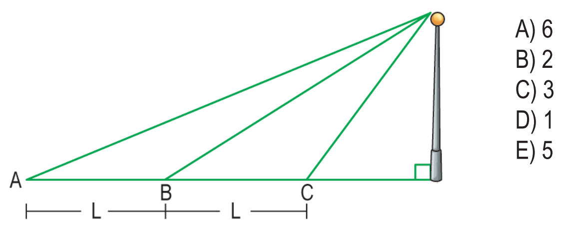
Donde:
- El ángulo de elevación del punto A es 37°.
- El ángulo de elevación del punto B es 74°.



A) 30,44 m B) 32,12 m C) 29,15 m
D) 25,6 m E) 30 m

14. Halla: $C = (\cot\alpha + \cot\theta)\tan\beta$

Donde:
- El ángulo de elevación en A es θ.
- El ángulo de elevación en B es β.
- El ángulo de elevación en C es α.



A) 6
B) 2
C) 3
D) 1
E) 5

Resolución de problemas

15. Clementina sale de su casa y recorre 450 m al N37°E y luego 30 m al este llegando a su destino. ¿Cuál es la distancia de separación entre la casa de Clementina y el punto de llegada?

A) 240 m B) $60\sqrt{61}$ m C) $160\sqrt{2}$ m
D) $120\sqrt{2}$ m E) $140\sqrt{2}$ m

16. Desde un punto en tierra se ve lo alto de un poste con un ángulo de elevación θ. Si nos acercamos a una distancia igual al doble de la altura del poste, el ángulo de elevación será de 37°. Calcula $\tan\theta$.

A) 0,1 B) $0,\overset{\frown}{1}$ C) 0,2
D) $0,\overset{\frown}{2}$ E) 0,3

17. Una persona colocada a una distancia de 36 m del pie de una torre observa su parte más alta con un ángulo de elevación cuya tangente es 7/12. Calcula la distancia en la misma dirección que debe alejarse para que el nuevo ángulo de elevación tenga por tangente 1/4.

A) 40 m B) 42 m C) 44 m
D) 46 m E) 48 m

18. Los ángulos de depresión para observar la parte superior y el pie de una torre desde la cima de un gran monumento, cuya altura es de 29 m, son de 30° y 60°, respectivamente. Calcula la altura de la torre.

A) 29/3 m B) 58/3 m C) 29/4 m
D) 29/5 m E) 58/9 m

19. Desde un acantilado, una persona observa un barco con un ángulo de depresión de 45°, luego el barco se aleja 80 m en el mismo plano vertical. Desde esta última posición del barco se observa al primer observador con un ángulo de elevación de 37°. Halla la altura del acantilado.

A) 100 m B) 120 m C) 180 m
D) 240 m E) 260 m

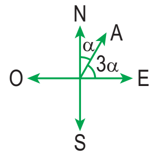
20. Un avión se encuentra a una altura de 150 m sobre un objetivo y se encuentra descendiendo con un ángulo de depresión α. Luego de recorrer 150 m es observado desde el objetivo con un ángulo de elevación 26°30'. Calcula a qué altura se encuentra el avión en dicha observación.

A) 50 m B) 60 m C) 75 m
D) 80 m E) 90 m

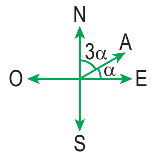
NIVEL 3

Comunicación matemática

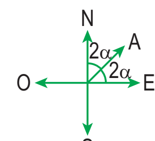
21. Relaciona según corresponda, las direcciones de A, $\left(\alpha = \frac{45}{2}\right)$:



NE



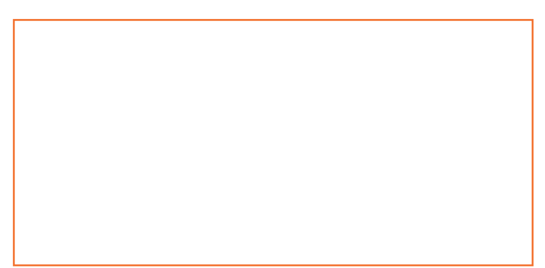
NNE



ENE

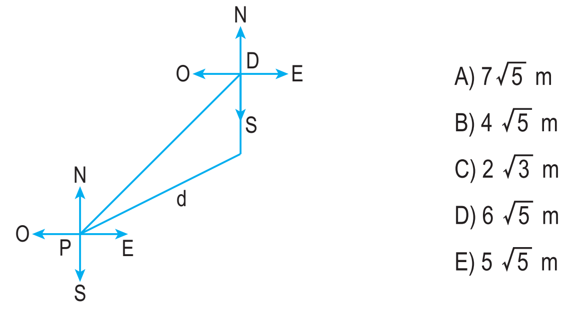
22. Representa gráficamente el enunciado.

Un caminante hace el siguiente recorrido: parte de su casa caminando 30 m con rumbo N30°E; luego, 10 m hacia el Este; después $15\sqrt{2}$ m al sudeste; enseguida 20 m al oeste y finalmente hacia el Sur hasta un punto que se encuentre al Este de su casa.



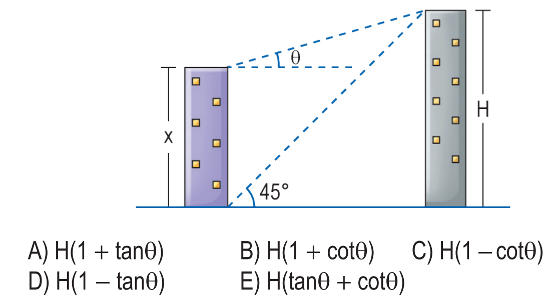
Razonamiento y demostración

23. Halla d, si "P" recorre $10\sqrt{2}$ m al NE y luego 5m al sur.



A) $7\sqrt{5}$ m
B) $4\sqrt{5}$ m
C) $2\sqrt{3}$ m
D) $6\sqrt{5}$ m
E) $5\sqrt{5}$ m

24. Del siguiente gráfico, halla x en términos de H y θ.



A) H(1 + tanθ)   B) H(1 + cotθ)   C) H(1 – cotθ)
D) H(1 – tanθ)   E) H(tanθ + cotθ)

Resolución de problemas

25. Desde lo alto de una montaña inclinada un ángulo θ respecto a la horizontal, se ve un objeto a una distancia d del pie de la montaña, con un ángulo de depresión α. Halla la altura de la montaña.

A) $d(\cot\alpha - \cot\theta)^{-1}$ B) $\dfrac{d\cos\alpha\cos\theta}{(\cos\theta - \cos\alpha)}$

C) $\dfrac{d}{\tan\theta - \tan\alpha}$ D) $d(\tan\theta - \tan\alpha)$

E) $d\cot\alpha\tan\theta$

26. Un móvil recorre 240 km al N37°O; luego $100\sqrt{2}$ km al SO; finalmente una cierta distancia al sur; hasta ubicarse al oeste de su punto de partida. ¿A qué distancia de dicho punto de partida se encuentra?

A) 248 km   B) 244 km   C) 276 km   D) 220 km   E) 224 km

27. Nicolás decide trotar en un campo deportivo; recorriendo una distancia L al NθE a partir de P, luego otra distancia L al EθS y finalmente una cierta distancia al SθO hasta ubicarse en Q, al este de P. Halla PQ en función de L y θ.

A) Lsenθ   B) Lcosθ   C) Lcscθ
D) Lsecθ   E) Ltanθ

28. Un niño sostiene dos globos. El ángulo de elevación que tiene en la mano derecha es de 21° y la cuerda mide a metros. El ángulo de elevación del globo que sostiene en la mano izquierda es de 24° y la cuerda mide $a\sqrt{2}$ metros.

¿Cuál es la distancia que hay entre los globos?

A) $(1+\sqrt{2})$ m   B) $(2+\sqrt{2})$ m   C) $2a\sqrt{5}$ m
D) $a\sqrt{5}$ m   E) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})a$ m

29. Una persona camina, por un plano inclinado que forma un ángulo x con la horizontal y observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación 2x. Luego de caminar una distancia de 15 veces la altura de la torre, observa nuevamente su parte superior con un ángulo de elevación de 3x.

Calcula: E = cscx – 15

A) 10   B) 20   C) 12   D) 15   E) 25

30. Se tiene una torre y dos puntos A y B ubicados en lados opuestos de ella. Desde A se divisa un punto de la torre con un ángulo de elevación α; notándose que la distancia de dicho punto observado a lo alto de la torre es igual a la visual trazada para dicha observación; mientras que, desde B, se divisa un punto ubicado 1 m, más abajo que el anterior con un ángulo de elevación θ; notándose que la visual trazada es igual a la distancia del nuevo punto observado a lo alto de la torre. Halla la altura de la torre.

A) $\dfrac{(\tan\theta+1)(\tan\alpha+1)}{\tan\theta-\tan\alpha}$ B) $\dfrac{(\operatorname{sen}\theta+1)(\operatorname{sen}\alpha+1)}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\theta}$

C) $\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\alpha}$ D) $\dfrac{(\cos\theta+1)(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha-\cos\theta}$

E) $\dfrac{(\tan\theta+1)(\tan\alpha+1)}{\tan\theta+\tan\alpha}$

Claves

NIVEL 1	7. C	13. A	20. B	26. B
1.	8. D	14. B	NIVEL 3	27. D
2.	9. C	15. B	21.	28. D
3.	10. C	16. E	22.	29. D
4.	NIVEL 2	17. E	23. E	30. B
5. A	11.	18. B	24. D	
6. E	12.	19. D	25. A	



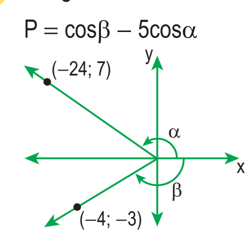
Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

1 Del gráfico, calcula:

$P = \cos\beta - 5\cos\alpha$



A) 2 B) –2 C) 4
D) 3 E) –4

2 Si: $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\theta \in$ IIC, calcula:

$M = 2\cot^2\theta - \sqrt{7}\sec\theta$

A) 8 B) 10 C) 12
D) 15 E) 20

3 Si $\tan\theta = \frac{5}{12}$ y $\text{sen}\theta < 0$; halla:

$R = 13\text{sen}\theta + 5\cot\theta$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

4 Si P(–3; 5) es un punto del lado final del ángulo θ en posición normal, calcula:

$A = (\sqrt{34} - 5)(\sec\theta + \tan\theta)$

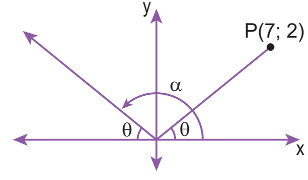
A) –3 B) –4 C) 5
D) 1/2 E) –3/2

5 Calcula el valor de:

$$R = \frac{\tan\pi + \cos2\pi + \text{sen}2\pi}{\text{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2}}$$

A) 0 B) 1 C) –1
D) N. D. E) 2

6 De la figura, calcula cosα.



A) –1/7 B) –7/8 C) $-\frac{7\sqrt{53}}{53}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{7}$ E) $-\frac{\sqrt{53}}{53}$

7 Siendo:

$\frac{4}{5}\text{sen}\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$

Además $\cos\alpha < 0$, calcula:

$H = 2\text{sen}\alpha + 3\cos\alpha$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) –3

8 Si: $f(x) = \dfrac{\text{sen}2x + \text{sen}4x - \text{sen}6x}{\cos 2x + \cos 4x + \tan x - 4\sec 4x}$

Calcula: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A) 1 B) –2 C) 2
D) 1/2 E) –1/2

9 Simplifica:

$$E = \frac{(a+b)^2 \text{sen}^3 \frac{\pi}{2} + (a-b)^2 \cos^3 \pi}{a\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} + b\cos^2\frac{\pi}{2}}$$

A) 2a B) –2a C) 4a
D) –4a E) –4b

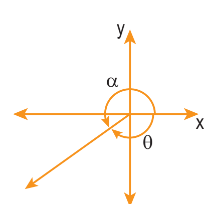
10 Siendo $P(1; -2\sqrt{6})$ un punto perteneciente al lado final de un ángulo ϕ en posición normal, calcula:

$E = \text{sen}\phi - 3\sqrt{6}\cos\phi$

A) $-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{6}$
D) $\sqrt{6}$ E) $-2\sqrt{6}$

11 Si: $\text{sen}\alpha = -\frac{15}{17}$, calcula:

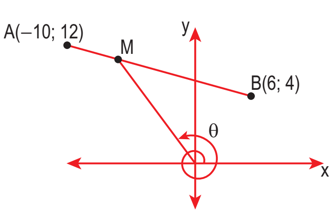
$B = \tan\alpha + \tan\theta + \tan(\alpha - \theta)$



A) –3,5 B) 3,5 C) 3,75
D) –3,75 E) 4,5

12 Del gráfico, AB = 4AM. Calcula:

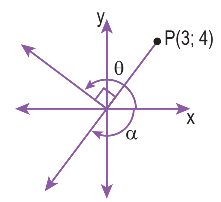
$E = 34\text{sen}\theta\cos\theta$



A) 15 B) –15 C) 30
D) 25 E) –30

13 Del gráfico, calcula:

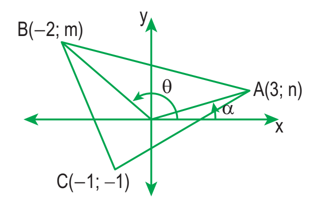
$R = \cos\alpha(\sec\theta\tan\alpha - 2\csc\theta)$



A) 2 B) 3 C) 4
D) –3 E) –4

14 Si el área de la región triangular ABC mide 10 u^2, calcula:

$T = 3\tan\alpha - 8\tan\theta$



A) 5 B) 9 C) 11
D) 15 E) 18

Claves

1. C	3. C	5. B	7. D	9. E	11. C	13. B
2. B	4. A	6. C	8. D	10. C	12. B	14. D

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Indica (V) verdadero o falso (F) según corresponda:

A) $\text{sen}1134°\cos148° < 0$ ( )
B) $\theta \in \text{IIC} \Rightarrow \text{sen}\theta\tan\theta < 0$ ( )
C) 450° pertenece al IC. ( )
D) $2\text{sen}90° + \cos180° = 1$ ( )

2. Relaciona:

847°	IIC
445°	IIIC
1070°	IC
918°	IVC

3. Analiza la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. $\text{sen}127°\cos135° > 0$ ( )

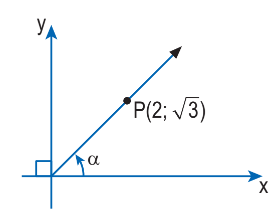
II. $\text{sen}90°\text{sen}60° = \frac{1}{2}$ ( )

III. $\text{sen}130°\cos60° < 0$ ( )

A) FFV B) FFF C) FVV
D) VVF E) VFV

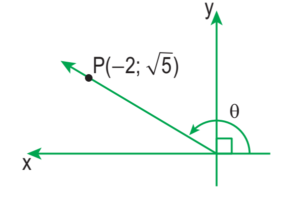
Razonamiento y demostración

4. Calcula: $M = \text{sen}\alpha\cos\alpha$



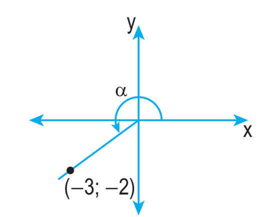
A) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ E) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

5. Calcula $\sec\theta$.



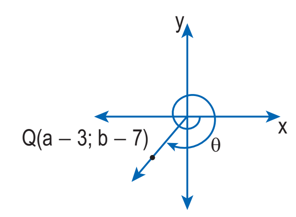
A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) -2

6. De la figura, calcula:
$A = \sqrt{13}\,(\text{sen}\alpha - \cos\alpha)$



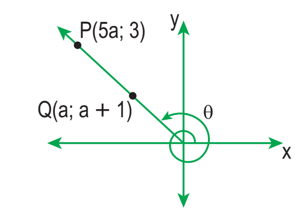
A) –5 B) –3 C) –2
D) 1 E) 2

7. Si $\tan\theta = 5$, calcula: $a + b$



A) 2 B) 4 c) –3
D) 6 E) 5

8. De la figura mostrada, calcula:
$S = \tan\theta + \cot\theta$



A) $\frac{13}{5}$ B) $-\frac{11}{13}$ C) $-\frac{13}{6}$
D) $-\frac{5}{2}$ E) $-\frac{8}{7}$

Resolución de problemas

9. Sabiendo que α es un ángulo positivo y menor que una vuelta; además:
$\text{sen}\theta\sqrt{\cos\theta} < 0$
Señala los signos de:
$C = \text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{3}$; $L = \cos\frac{2\theta}{5} - \cos\theta$

A) (+), (+) B) (–), (–)
C) (+), (–) D) (–), (+)
E) No se puede precisar

10. Si: $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[5]{7^{\text{sen}\theta}}$; $\cos\theta < 0$; calcula:
$K = \cot\theta\cos\theta + \text{sen}\theta$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $-\frac{5}{6}$
D) $-\frac{6}{5}$ E) $-\frac{7}{5}$

11. Tomando $\sqrt{5} = 2{,}236$ y sabiendo que $\cot\alpha = -0{,}5$ con $\alpha \in \text{IVC}$, ¿cuál es el valor de $\csc\alpha$?

A) 1,12 B) –1,118 C) –2,32
D) 1,24 E) 1,13

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Si α y β son dos ángulos positivos, menores de una vuelta en posición normal, tales que sus lados finales forman un ángulo recto, además:
$\tan\beta < 0 \wedge \alpha > \beta$.
Halla el signo de las siguientes expresiones:

$M = \text{sen}\alpha + \cos\alpha$ ( )

$N = \cos\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\frac{\beta}{2}$ ( )

$P = \text{sen}2\alpha - \text{sen}2\beta$ ( )

A) (–); (–); (+)
B) (+); (+); (–)
C) (+); (+); (+)
D) (–); (–); (–)
E) (+); (–); (+)

13. Halla el signo en cada caso:

I. $\text{sen}240°\cos300°$ ( )

II. $\tan120°\text{sen}150°$ ( )

III. $\text{sen}100°\cos200°$ ( )

14. Siendo A, B y C ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°, además se cumple:

$\sqrt{1 - \cos A} + \sqrt{\cos A - 1} = 1 + \text{sen}B$

$\sqrt{\csc B + 2} = |\tan C - 1|$

Calcula el valor de A + B + C.

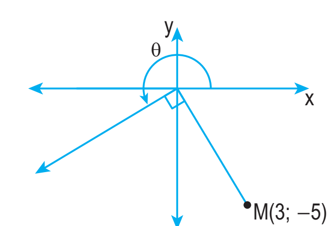
A =  B = ☐ C = ☐

A) 540° B) 450° C) 810°
D) 630° E) 360°

Razonamiento y demostración

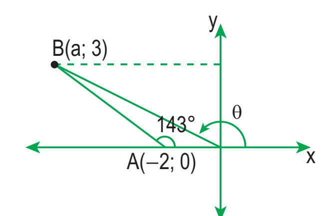
15. Del gráfico mostrado, calcula:

$T = 5\tan\theta + \sqrt{34}\cos\theta$



A) 1/2　　B) –4　　C) –2
D) 4　　E) –1/2

16. Del gráfico mostrado, calcula $\tan\theta$.



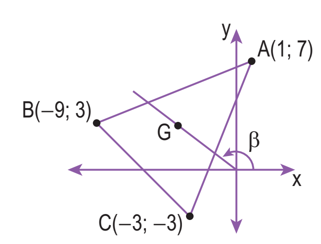
A) $-\frac{3}{4}$　　B) $-\frac{2}{3}$　　C) $-\frac{1}{2}$
D) $-\frac{4}{3}$　　E) $-\frac{4}{5}$

17. Calcula el valor de x, a partir de la condición:

$$\frac{\csc^2 45°\text{sen}270°\text{sen}30° - \cos180° + \tan^2 60°}{x\csc270° + \cos630°} = 3$$

A) –1　　B) 2　　C) –2
D) 1　　E) 1/2

18. De acuerdo al gráfico, calcula $\tan\beta$, si G es el baricentro del ΔABC.



A) –7/12　　B) –7/11　　C) –12/7
D) –11/7　　E) –5/12

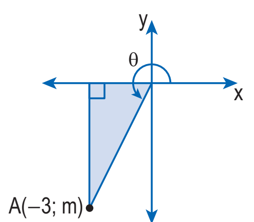
Resolución de problemas

19. Si α es un ángulo en posición normal, tal que $\alpha = 20°$, halla el mayor ángulo coterminal con β menor que 3000°.

A) 2900°　　B) 1080°　　C) 3640°
D) 900°　　E) 2500°

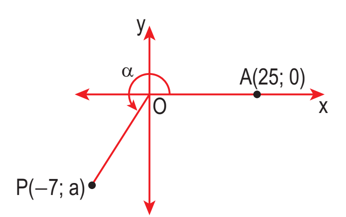
20. Si el área de la región sombreada mide 9 u^2, calcula:

$P = \tan\theta\text{sen}\theta$



A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B) $-\frac{4}{5}$　　C) $-\sqrt{5}$
D) $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　E) $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

21. A partir del gráfico, calcula $\text{sen}\alpha$, si AO = OP. (O: origen de coordenadas)



A) $-\frac{24}{25}$　　B) $-\frac{7}{25}$　　C) $-\frac{7}{13}$
D) $-\frac{7}{12}$　　E) $-\frac{12}{13}$

22. Siendo α un ángulo en posición normal, tal que un punto de su lado final es P(–k; 1 – k),
calcula el valor de k, si $\tan\alpha = 4$.

A) 2　　B) $-\frac{1}{2}$　　C) $-\frac{1}{3}$
D) $\frac{3}{2}$　　E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Si $\theta \in$ IIIC, es menor que una vuelta y positivo, halla el signo de las siguientes expresiones:

$H = \tan\theta + \text{sen}\frac{\theta}{2}$

$I = \text{sen}\theta\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{3}$

$J = \sec\frac{2\theta}{3} - \csc\frac{\theta}{4}$

A) (–); (+); (–)　　B) (+); (+); (+)　　C) (+); (–); (+)
D) (+); (+); (–)　　E) (–); (–); (+)

24. Analiza la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. Si α toma cualquiera de los valores siguientes 30°, 40°, 60°, el $\cos\alpha$ será siempre positivo. ( )

II. Si $90° < \beta < 150°$, el $\cos\beta$ para cualquier valor de β será siempre negativo. ( )

III. Si $200° < \theta < 250°$, entonces $\tan\theta > 0$. ( )

25. Determina el signo de las expresiones; si $\theta \in$ IIIC y $\alpha \in$ IVC.

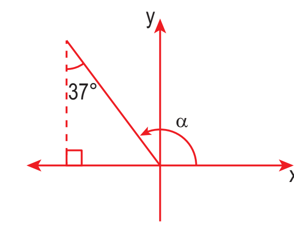
$$A = \frac{\text{sen}\theta\cos\theta\tan\alpha}{\csc\alpha + \cot\alpha}$$

$$B = \frac{\sec\alpha - \text{sen}\alpha}{\cot\frac{\theta}{2}}$$

A) (+); (+) B) (+); (–) C) (–); (–)
D) (–); (+) E) No se puede precisar

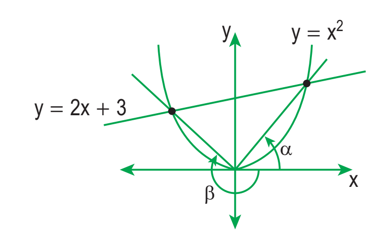
Razonamiento y demostración

26. Del gráfico, calcula:
$E = (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^{(-\tan 45°)}$



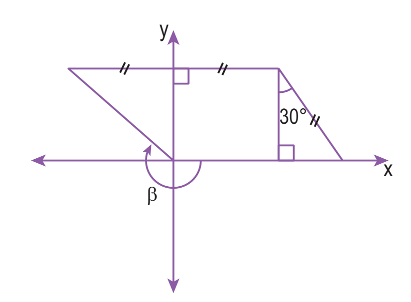
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

27. De acuerdo al gráfico, calcula:
$L = \text{sen}\alpha\cos\beta$



A) $0,2\sqrt{5}$ B) $-0,2\sqrt{5}$
C) $-0,3\sqrt{5}$ D) $0,3\sqrt{5}$
E) $-0,5\sqrt{5}$

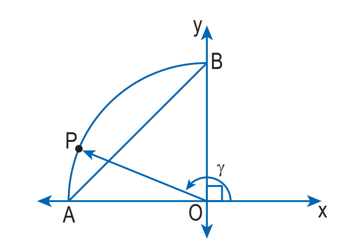
28. De la figura adjunta, calcula $\cot\beta$.



A) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

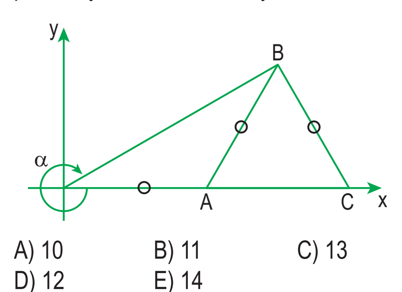
Resolución de problemas

29. Dado el cuadrante AOB, donde la cuerda $AB = 10\sqrt{2}$, además el punto P es (–8; y). Calcula: $H = \text{sen}\gamma - \cos\gamma$



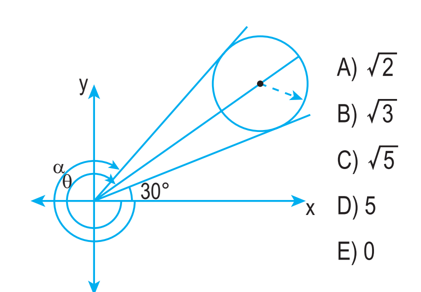
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{7}{5}$
D) $\frac{1}{5}$ E) 2

30. Del gráfico, calcula la suma de $\csc\alpha$ y los valores númericos de las abscisas de los puntos A y C, si BC mide 4 cm y $m\angle ABC = 60°$



A) 10 B) 11 C) 13
D) 12 E) 14

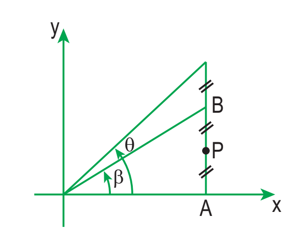
31. Del gráfico, calcula $\csc\theta$, si $\alpha = -300°$.



A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{5}$
D) 5
E) 0

32. Del gráfico, el punto P(4; 2) es punto medio de AB, calcula:

$E = \tan\theta - \tan\beta$



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) 2

Claves

NIVEL 1	7. B	13.	20. D	26. E
1.	8. C	14. C	21. A	27. C
2.	9. B	15. C	22. C	28. C
3. B	10. B	16. C	NIVEL 3	29. C
4. B	11. B	17. A	23. D	30. E
5. C	NIVEL 2	18. B	24.	31. A
6. D	12. A	19. A	25. B	32. C

Aplicamos lo aprendido





TEMA 3: REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1 Calcula:

$$Q = \frac{\text{sen}250°\csc 290°\tan 300°}{\text{sen}840°\tan 3000°\cos 1200°}$$

Aprox. $(\sqrt{3} = 1{,}73)$

A) 2,409 B) 2,309 C) –2,307
D) 2,109 E) –2,107

2 Reduce:

$E = \tan(36\,660°)\sec(180\,330°)$

A) – 2 B) 1 C) – 3
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

3 Si: $17x = 180°$

Calcula: $M = \dfrac{\csc 13x}{\csc 4x} - \dfrac{\tan 16x}{\tan x}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) –1 E) –2

4 Si: $\tan 20° = a$

Calcula:

$$A = \frac{\text{sen}160°\cos 250°}{\text{sen}340°\sec 110°}$$

A) $\dfrac{-a^2}{1+a^2}$ B) $\dfrac{-1}{1+a^2}$ C) $\dfrac{1}{1+a^2}$
D) $\dfrac{1}{1-a^2}$ E) $\dfrac{a^2}{1+a^2}$

5 Dado un triángulo ABC, simplifica:

$$E = \frac{2\cos(A+B)}{\cos C} - 3\sec(A+B+C)$$

A) –1 B) 1 C) 2
D) –2 E) 5

6 Si $x + y = 2\pi$, calcula:

$$A = \text{sen}x + \tan\frac{x}{2} + \text{sen}y + \tan\frac{y}{2}$$

A) senx B) 2senx C) $\tan\dfrac{x}{2}$
D) $-\tan\dfrac{x}{2}$ E) 0

7 Si: $f(\theta) = \dfrac{\text{sen}2\theta + \cos 4\theta}{\tan 8\theta + \csc 6\theta}$,

Calcula: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A)		B) 0		C) –3
D) –2		E) 1

8 Si: $f(x) = \dfrac{\text{sen}5x + \cos 8x}{\cos 2x + \text{sen}6x}$,

Calcula:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

A) –3		B) –2		C) –1
D) 0		E) 1

9 Halla el valor de N en la siguiente expresión:

$N(1 - \tan 205°\cot 258°) = \dfrac{\text{sen}335°}{\text{sen}115°} + \dfrac{\cos 282°}{\text{sen}258°}$

A) $-\frac{3}{4}$		B) $\frac{2}{3}$		C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$		E) 1

10 Si sen20° = n, halla:

$C = \text{sen}200°\tan 340°\cos 160°$

A) n^2		B) $-n^2$		C) $\dfrac{n^2}{1-n^2}$
D) $\dfrac{-n^2}{1-n^2}$		E) $\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

11 En un triángulo ABC, calcula:

$J = \dfrac{\text{sen}(A+B)}{\text{sen}C} + \dfrac{\tan(B+C)}{\tan A} + \dfrac{\cos(C+A)}{\cos B}$

A) 1		B) 3		C) –1
D) – 3		E) 0

12 Si A y B son ángulos complementarios, además B y C son ángulos suplementarios, calcula:

$M = \dfrac{\text{sen}(A+B+C)}{\cos B} + \dfrac{\tan A}{\cot C}$

A) 1		B) –1		C) 0
D) 2		E) –2

13 Siendo x e y ángulos complementarios, los cuales cumplen:

$\tan x + \tan y = \sqrt{a}$ ...(I)

$\sec x - \sec y = \sqrt{b}$ ...(II)

Halla una relación entre a y b independiente de x e y.

A) $a - b = \sqrt{a}$		B) $a + b = 2\sqrt{a}$
C) $a - b = 2\sqrt{a}$		D) $a + b = \sqrt{a}$
E) $\sqrt{a} - b = a$

14 Si A; B y C son las medidas de los ángulos internos de un triángulo ABC, simplifica:

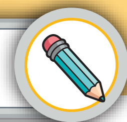
$S = \dfrac{\text{sen}(270° - B)}{\cos B} + \dfrac{\tan A}{\cot(90° + A)}$

A) 1		B) 2		C) –2
D) –1		E) 0

Claves

1. C	3. C	5. B	7. D	9. A	11. C	13. C
2. A	4. A	6. E	8. C	10. B	12. E	14. C

Practiquemos



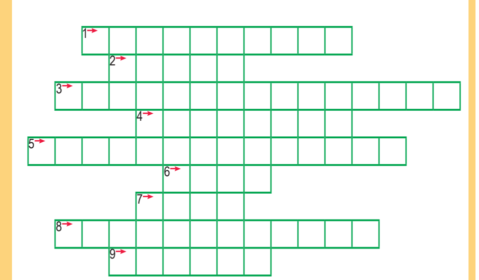
NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Crucigrama

Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

1. Ángulo en posición normal, cuyo lado final coincide con un semieje.
2. Unidad de medida de un ángulo.
3. Ángulos cuya suma de medidas es 90°.
4. Cateto opuesto entre cateto adyacente.
5. Ángulos cuya suma de medidas es 180°.
6. Segunda letra del alfabeto griego.
7. Cateto opuesto entre hipotenusa.
8. Ángulos trigonométricos que poseen el mismo vértice, el mismo lado inicial y final.
9. Ángulo geométrico cuya medida es mayor que 90°.



2. Relaciona según corresponda:

sec233°	5/4
sec217°	– 5/3
sec323°	– 5/4

Razonamiento y demostración

3. Calcula el valor de: sen2580°

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Calcula el valor de: tan6173°

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$

D) $-\frac{4}{3}$ E) 1

5. Calcula: tan5520°

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Efectúa:

C = sen120°cos225°

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

7. Determina el valor de:

C = (sen330° + cos240°)tan210°

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. Calcula:

N = sen(–240°)cos(–120°)

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

9. Efectúa:

$$D = \frac{\text{sen}3015°.\tan 4290°}{\cos 2730°}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ E) $-\frac{1}{3}$

10. Halla:

$U = (\cos^2 135° - 3\tan 127°)\text{sen}^2 240°$

A) 16 B) 18 C) $\frac{27}{8}$

D) 9 E) $\frac{8}{27}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica verdadero a falso según corresponda:

I. $\text{sen}(\alpha + 65\pi) = -\text{sen}\alpha$ ( )

II. $\tan(\alpha - 73\pi) = \tan\alpha$ ( )

III. $\sec(\alpha - 90\pi) = \sec\alpha$ ( )

12. Relaciona según corresponda:

sen2430°	1
cos5040°	0
tan3240°	–1

Razonamiento y demostración

13. Reduce:

$$T = \frac{\text{sen}(-x) + \cos(-x)}{\text{sen}x - \cos x}$$

A) 1 B) –1 C) 2

D) –2 E) 0

14. Simplifica:

$$R = \frac{\text{sen}(90° + x)}{\cos(180° - x)} + \frac{\tan(270° - x)}{\cot(-x)}$$

A) 1 B) –1 C) 0

D) 2 E) –2

15. Simplifica:

$$E = \frac{\text{sen}(180° + x)\cos(360° - x)}{\text{sen}(270° + x)}$$

A) senx B) –senx C) cosx

D) –cosx E) 1

16. Reduce:

$$A = \frac{\text{sen}(\pi + x)\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\cot(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

A) senx B) cosx C) –senx

D) –cosx E) –1

17. Reduce:

$$S = \frac{\text{sen}(x - \pi)\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

A) cotx B) –cotx C) –senx

D) 1 E) –1

18. Calcula:

$$A=\left\{\frac{\text{sen}150°\cos 225°}{\tan 143°}\right\}^{\tan 315°}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ E) $-2\sqrt{2}$

19. Simplifica:

$$T=\frac{\tan(123\pi+x)\,\text{sen}\left(\frac{135\pi}{2}+x\right)}{\cot\left(\frac{1533\pi}{2}-x\right)}$$

A) cosx B) –cosx C) tanx
D) –tanx E) –senx

20. Calcula el valor de:

$$E=\frac{\csc(-240°)+\sec(-150°)+\cos(-120°)}{\cot(-315°)+\text{sen}(-135°)-\cos(-225°)}$$

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) –2

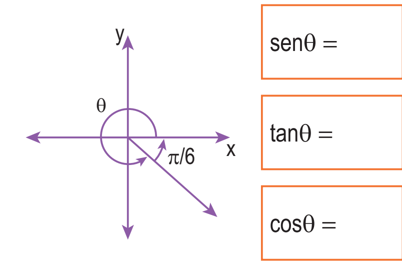
NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda,
si: $x-y=\frac{3\pi}{2}$

I. senx = cosy ( )
II. cosx = seny ( )
III. tanx = coty ( )

22. Observa la gráfica y luego completa.



senθ =

tanθ =

cosθ =

Razonamiento y demostración

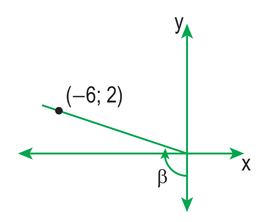
23. Si: x + y = 180°; además:
3tanx + 2tany = cosx + cosy + 2,
calcula:
V = 2tanx + 3tany

A) 1 B) 2 C) 0
D) –2 E) –1

24. Calcula:
L = cos10° + cos20° + cos30° + ... + cos180°

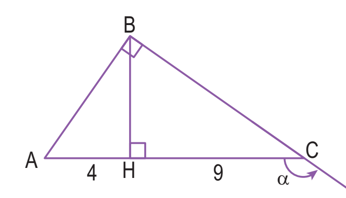
A) 1 B) 2 C) 0
D) –1 E) –2

25. Del gráfico, calcula tanβ.



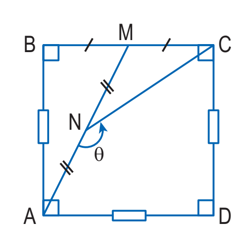
A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) –3
D) $-\frac{1}{3}$ E) –6

26. Del gráfico, calcula tanα.



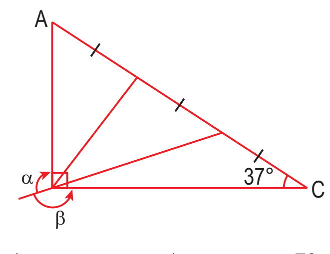
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{9}$

27. Del gráfico, calcula tanθ.



A) $\frac{4}{7}$ B) $-\frac{4}{7}$ C) $\frac{7}{4}$
D) $-\frac{7}{4}$ E) $-\frac{2}{7}$

28. Del gráfico, calcula: tanα – tanβ



A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{73}{24}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{73}{24}$

29. Reduce:

$$P=\sum_{n=1}^{3}\left\{\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(n\pi-x)\right\}$$

A) senx + cosx B) senx – cosx
C) –senx + cosx D) –senx – cosx
E) 0

30. Si: $\sum_{n=1}^{3}\left\{\tan\left(n!\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=0$; calcula:
cotθ; si: θ ∈ IC.

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 4
D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. D
4. B
5. B
6. D
7. D
8. D
9. A
10. C

NIVEL 2
11.
12.
13. B
14. E
15. A
16. D
17. B
18. B
19. B
20. B

NIVEL 3
21.
22.
23. D
24. D
25. B
26. C
27. B
28. C
29. D
30. B

Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

1 Si: $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$, determina el máximo valor de:

$$M = \cos^2\theta - 4\cos\theta + 3$$

A) $-\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{4}$

D) $-\frac{9}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

2 Halla el intervalo de a; si:

$$\frac{2}{6 + 3\text{sen}2x} = \frac{5a - 4}{3} + \frac{3 - 3a}{2}$$

A) $\left[\frac{1}{4}; 3\right]$ B) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ C) $\left\langle\frac{1}{3}; 3\right]$

D) $\left\langle\frac{1}{2}; 2\right]$ E) $\left[\frac{1}{2}; 3\right\rangle$

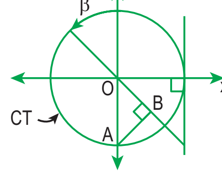
3 Determina la extensión de:

$$F = \frac{2 - 2\cos 2\theta - \cos^2 2\theta}{\cos 2\theta + 2}$$

A) $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ B) $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$ C) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

D) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$

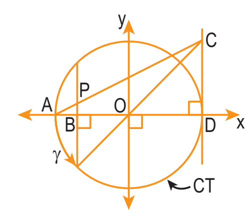
4 De la figura, calcula AB en términos de β:



A) $|\cos\beta|$ B) $|\text{sen}\beta|$ C) $\text{sen}\beta$

D) $\cos\beta$ E) $\cos^2\beta$

5 Halla PB en términos de γ:



A) $\frac{\cot\gamma(1 - \cos\gamma)}{2}$ B) $\frac{\tan\gamma(1 - \text{sen}\gamma)}{2}$

C) $\frac{\cot\gamma(1 + \cos\gamma)}{2}$ D) $\frac{\tan\gamma(1 - \cos\gamma)}{2}$

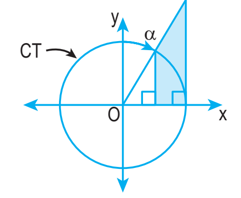
E) $\frac{\tan\gamma(1 + \cos\gamma)}{2}$

6 ¿Cuál de los siguientes valores es el mayor?

A) sen40° B) sen100° C) sen160°

D) sen220° E) sen280°

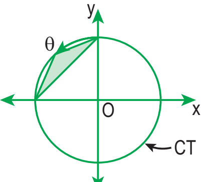
7 Halla el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{2}$ B) $\dfrac{\tan\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{2}$ C) $\dfrac{\tan^2\alpha}{2}$

D) $\dfrac{\cos^2\alpha}{2}$ E) $\dfrac{\tan^2\alpha\,\text{sen}\alpha}{2}$

8 De la CT mostrada, calcula el área de la región sombreada.



A) $0{,}5(\text{sen}\theta - \cos\theta)$ B) $0{,}5(\cos\theta - \text{sen}\theta)$

C) $0{,}5(\cos\theta - \text{sen}\theta + 1)$ D) $0{,}5(\text{sen}\theta + \cos\theta)$

E) $0{,}5(\text{sen}\theta - \cos\theta - 1)$

9 Si $\alpha \in$ IVC, determina el menor extremo del intervalo donde se encuentra la siguiente expresión:

$$R = \frac{2}{(\text{sen}\alpha + 2)(\text{sen}\alpha + 4)}$$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) 1 C) $\dfrac{13}{15}$

D) $\dfrac{1}{15}$ E) $\dfrac{2}{3}$

10 ¿Cuál de los siguientes valores es el menor?

A) tan50° B) tan130° C) tan140°

D) tan200° E) tan300°

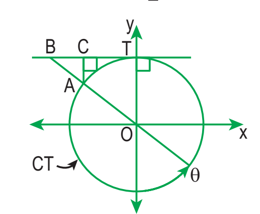
11 Si: $\theta \in$ IIC, halla el máximo valor entero de:

$$F = \frac{3 + \tan\theta}{2} - \frac{1 + \tan\theta}{3}$$

A) 1 B) 2 C) –1

D) 0 E) –2

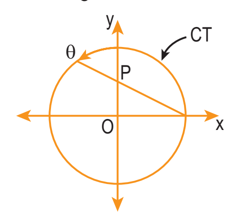
12 Si: $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calcula AC.



A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

D) 1 E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

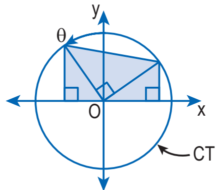
13 De la figura, calcula OP en términos de θ.



A) $\dfrac{\cos\theta}{\text{vers}\theta}$ B) $\dfrac{\text{vers}\theta}{\cos\theta}$ C) $\dfrac{\text{sen}\theta}{\text{vers}\theta}$

D) $\dfrac{\text{sen}\theta}{\text{cov}\,\theta}$ E) $\dfrac{\text{vers}\theta}{\text{sen}\theta}$

14 Halla el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{1}{2} + \text{sen}\theta\cos\theta$ B) $\dfrac{\text{sen}\theta\cos\theta}{2}$ C) $\text{sen}\theta\cos\theta$

D) $\dfrac{1}{2} - \text{sen}\theta\cos\theta$ E) $-\text{sen}\theta\cos\theta$

Claves

1. C	3. E	5. E	7. B	9. A	11. A	13. C
2. B	4. A	6. B	8. E	10. E	12. B	14. D

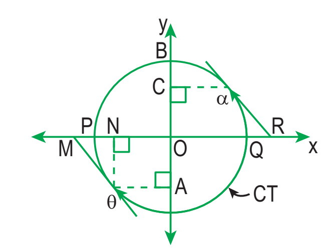


Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

1. En la CT:



Completa la notación de los siguientes segmentos:

QM : exsecθ

QR : ____________

CB : ____________

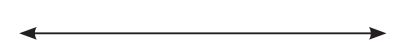
AB : ____________

ON : ____________

OC : ____________

2. Representa en la recta numérica el intervalo en el cual se encuentran las siguientes expresiones:

A) senx:



B) $\sec^2x$; $\forall x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\pi/2\}$; $n \in \mathbb{Z}$



C) $\dfrac{1}{\cos x + 2}$

D) $\dfrac{1}{\tan\theta}$; $\forall\theta \in \langle 0; \pi/4]$

Razonamiento y demostración

3. Indica el menor valor.

A) cot35°　　B) cot100°　　C) cot300°
D) cot200°　　E) cot275°

4. Halla el signo de:

P = tan1cot2tan3

A) (+)　　B) (–)　　C) (+) o (–)
D) (+) y (–)　　E) No se puede precisar

5. Si: $\theta \in$ IVC y $\text{sen}\theta = \dfrac{a-2}{5}$, ¿cuántos valores enteros puede tomar a?

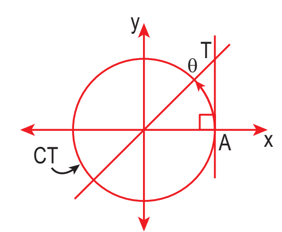
A) 3　　B) 4　　C) 5　　D) 7　　E) 6

6. Calcula el máximo valor de la expresión:

$M = 2 - 3\tan^2x$

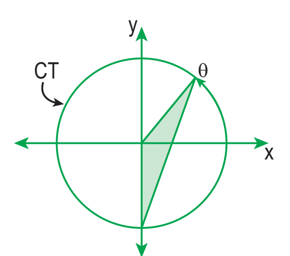
A) 1　　B) 2　　C) 3　　D) 4　　E) 5

7. Si: senθ = 0,6 calcula AT.



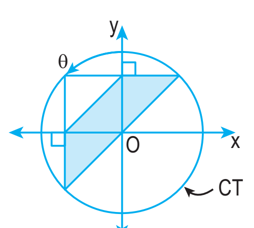
A) 0,6　　B) 0,8　　C) 0,75
D) 1,0　　E) 1,25

8. En la CT, halla el área de la región sombreada.



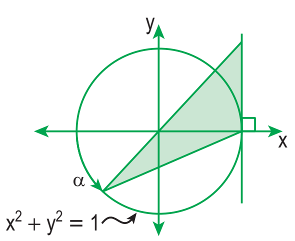
A) $\frac{1}{2}\text{sen}\theta$　　B) $\frac{1}{2}\cos\theta$　　C) $\frac{1}{2}\tan\theta$
D) 1/2　　E) 1

9. En la CT mostrada en la figura, calcula el área de la región sombrada.



A) $\frac{3}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$　　B) $\frac{1}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$　　C) $-\frac{3}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$
D) $\frac{5}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$　　E) $-\frac{5}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$

10. Halla el área de la región sombreada.



A) $\tan\alpha\cos\alpha$　　B) $\frac{1}{2}\tan\alpha\cos\alpha$　　C) $\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$
D) $\frac{1}{2}\tan\alpha(1-\cos\alpha)$　　E) $\frac{1}{2}(1-\text{sen}\alpha)$

Resolución de problemas

11. Si: $\alpha \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, además

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\alpha \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$, calcula el valor de $4(A + B)$ si:

$A \leq \cos^2x - 4\cos x - 4 \leq B$

A) $6\sqrt{2} + 14$ B) $6\sqrt{2} - 14$
C) $8\sqrt{2} - 21$ D) $8\sqrt{2} + 21$
E) $8\sqrt{2} + 14$

12. ¿Para qué valores de x sería posible la siguiente igualdad:

$(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}x - \cos x) = (\operatorname{sen}x + \cos x)$, si además $\theta \in$ IC?

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$
C) $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$
E) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. Sean α y β dos ángulos que pertenecen al IIC que cumplen:

$\gamma = \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta$

Señala la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. γ pertenece al IC o IVC.
II. γ pertenece al IIIC.
III. γ es cuadrantal.
IV. $\operatorname{sen}\gamma \in [0; 1\rangle$

A) VFFF B) VFVF C) FVFV
D) VFFV E) FVVF

14. Si: $R = \cos^2x + \operatorname{sen}x$

Además:

I. $\operatorname{sen}x > \cos x$
II. $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$
III. $\operatorname{sen}x \in \left\langle \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

¿Qué datos son necesarios para hallar el valor de R?

A) I y III B) I y II C) II y III
D) Solo II E) Solo III

Razonamiento y demostración

15. Halla el intervalo de k, si:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{k-1}{2}$

A) [–1; 1] B) [–1; 2]
C) [–1; 3] D) [–2; 3]
E) [–1; 4]

16. Calcula el mínimo valor de la expresión:

$E = 3 + 2\tan^2x$

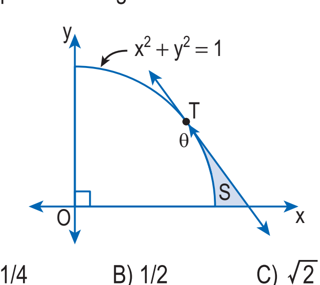
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

17. De la figura mostrada, calcula:

$M = (2S + \theta)\cot\theta$

S: área de la región sombreada

T: punto de tangencia



A) 1/4 B) 1/2 C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) 2/3

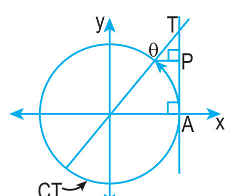
18. Sabiendo que: $\pi < \alpha < 2\pi$,

halla la variación de:

$M = 3\cos\frac{\alpha}{2} - 1$

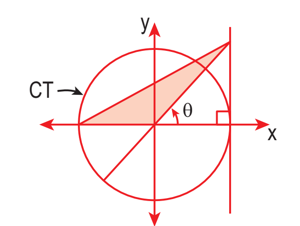
A) [– 4; 2] B) ⟨– 4; 2⟩
C) ⟨– 4; 1⟩ D) ⟨– 4; – 1⟩
E) [– 4; 1]

19. Halla PT, en términos de θ.



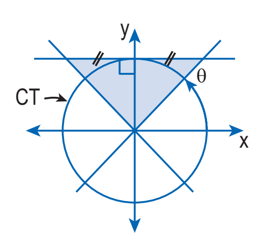
A) $\tan\theta + \operatorname{sen}\theta$
B) $\cot\theta + \cos\theta$
C) $\tan\theta - \operatorname{sen}\theta$
D) $\cot\theta - \cos\theta$
E) $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$

20. Halla el área de la región sombreada en la CT.



A) $\frac{1}{2}\tan\theta$
B) $\frac{1}{2}\cot\theta$
C) $\tan\theta$
D) $\cot\theta$
E) 1

21. Halla el área de la región sombreada en la CT.



A) $\cot\theta$ B) $\tan\theta$ C) $\frac{1}{2}\tan\theta$
D) $\frac{1}{2}\cot\theta$ E) 1

Resolución de problemas

22. Siendo α un ángulo que pertenece al cuarto cuadrante, halla la suma de los valores enteros de la siguiente expresión:

$$T = \frac{4 - 4\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha - \cot\frac{53°}{2}}$$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) 3

23. En una CT se ubica un arco positivo α en el segundo cuadrante. Halla el valor del perímetro del triángulo formado al unir el punto de la parte final del arco α; el origen de la circunferencia y el origen de arcos.

A) $2 + \sqrt{2 - 2\cos\alpha}$
B) $2 + \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\alpha}$
C) $2 - \sqrt{2 - 2\cos\alpha}$
D) $2 + \sqrt{2 + 2\tan\alpha}$
E) $2 - \sqrt{2 + 2\cos\alpha}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

24. Compara las siguientes cantidades:

M: El menor valor entero de x si:

$\frac{x-2}{3} = \operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta$

N: El mayor valor entero de k si:

$\frac{k+3}{2} = \cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

A) M = N B) M + N = 0
C) M + N = 1 D) M > N
E) M + N = 2

25. De las siguientes expresiones:

I. Si: $x_1 < x_2 \Rightarrow \cos x_1 < \cos x_2$
$\forall x_1; x_2 \in \mathbb{R}$

II. Si: $x_1 > x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2$
$\forall x_1; x_2 \in \text{IIIC}$

III. Si: $x_1 > x_2 \Rightarrow \text{sen}\,x_1 > \text{sen}\,x_2$
$\forall x_1, x_2 \in \text{IIIC}$

IV. Si: $x_1 < x_2 \Rightarrow \cot x_1 > \cot x_2$
$\forall x_1; x_2 \in \text{IC}$

¿Cuántas son falsas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Ninguna

Razonamiento y demostración

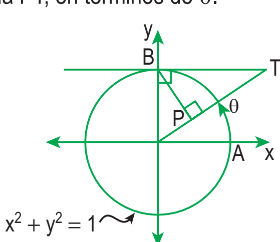
26. Siendo θ un arco del IVC para el cual se tiene que:
$\text{sen}\theta = \dfrac{2n-5}{3}$, determina la variación de n.

A) $\langle 1; 5/2\rangle$ B) $\langle 1; 5/2]$ C) $[1; 3/2]$
D) $[1; 3/2\rangle$ E) $[3/2; 5/2\rangle$

27. Si: $\theta \in \text{IIC}$ y $\cos\theta = \dfrac{k-3}{5}$
entonces el intervalo de k es:

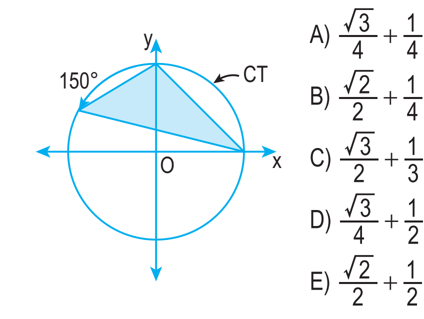
A) $[-2; 8]$ B) $[-2; 3\rangle$ C) $\langle -2; 3\rangle$
D) $\langle -2; 8]$ E) $[0; 1]$

28. Halla PT, en términos de θ.



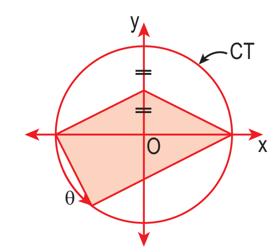
A) $\text{sen}\theta\tan\theta$ B) $\text{sen}\theta\cot\theta$
C) $\cos\theta\tan\theta$ D) $\cos\theta\cot\theta$
E) $\text{sen}\theta\cos\theta$

29. Calcula el área de la región sombreada.



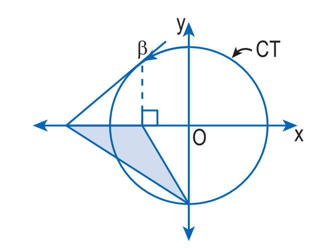
A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}$
B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4}$
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{3}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}$
E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}$

30. Halla el área de la región sombreada en términos de θ.



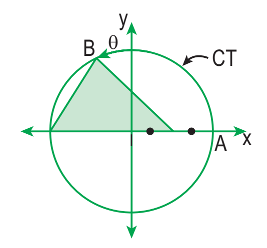
A) $-\dfrac{\text{sen}\theta}{2}$ B) $\dfrac{1}{2} - \text{sen}\theta$
C) $\dfrac{1}{2} - \cos\theta$ D) $\dfrac{1}{2} + \text{sen}\theta$
E) $\dfrac{1}{2} + \cos\theta$

31. Si el área de la región sombreada es 2, calcula:
$H = \sec^2\beta + \cos^2\beta$



A) 16 B) 12 C) 14
D) 18 E) 20

32. Calcula el área de la región sombreada.



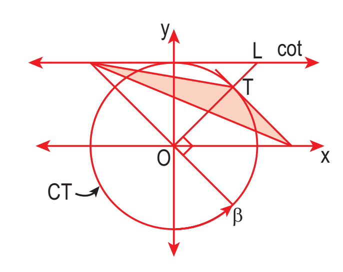
A) $\dfrac{3}{4}\text{sen}\theta$ B) $\dfrac{1}{2}\text{sen}\theta$ C) $\text{sen}\theta$
D) $-\dfrac{1}{2}\text{sen}\theta$ E) $-\dfrac{3}{4}\text{sen}\theta$

Resolución de problemas

33. Dado el intervalo $0 \le \alpha \le \pi/6$ obtenga la variación de $\sec\phi$.
Si:
$4\text{sen}^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 - \sec\phi$

A) $[-4; -1]$ B) $[1; 4]$ C) $[2; 3]$
D) $[-2; 3]$ E) $[-3; -2]$

34. Del siguiente gráfico, halla el valor del área sombreada en términos de β, si T es punto de tangencia.



A) $2\cot\beta$ B) $-\dfrac{\tan\beta}{2}$ C) $\tan\beta$
D) $-\dfrac{\cot\beta}{2}$ E) $\dfrac{\cot\beta}{2}$

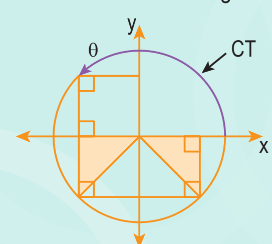


Claves

NIVEL 1				
1.	8. B	15. C	23. A	30. B
2.	9. C	16. C	**NIVEL 3**	31. D
3. C	10. D	17. D	24. B	32. A
4. A	11. C	18. D	25. C	33. E
5. B	12. B	19. C	26. A	34. D
6. B	**NIVEL 2**	20. A	27. C	
7. C	13. A	21. A	28. D	
	14. D	22. B	29. A	

MARATÓN *Matemática*

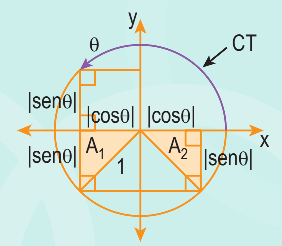
- En la siguiente CT calcula el área de la región sombreada.





Resolución:

Del gráfico, tenemos:



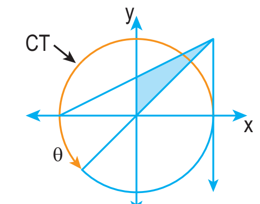
$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{|\operatorname{sen}\theta||\cos\theta|}{2} + \frac{|\operatorname{sen}\theta||\cos\theta|}{2}$$

$A_T = |\operatorname{sen}\theta||\cos\theta|$; $\theta \in$ IIC

$\Rightarrow A_T = (+\operatorname{sen}\theta)(-\cos\theta)$

$\therefore A_T = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

1. En la siguiente CT, calcula el área de la región sombreada.



A) $\frac{\tan\theta}{4}$

B) $-\sec\theta$

C) $\tan\theta$

D) $-\tan\theta\sec\theta$

E) $\frac{\cot\theta}{2}$

2. Dos personas y una antena equidistan entre sí, las personas observan la parte más alta de la antena con un mismo ángulo de elevación α. Si la relación entre la altura de la antena y la distancia entre la base de la antena y el punto medio de la distancia entre las personas es 1/3. Calcula $\cot\alpha$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 3 C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $2\sqrt{3}$

3. Si θ es un ángulo positivo que pertenece al IIIC y es menor a una vuelta. Determina al signo de las siguientes expresiones.

$A = \cos(2\theta - 270°)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$; $B = \tan\left(\frac{\theta + 60°}{2}\right)$

A) (+) o (–); (–) B) (+); (–) C) (–); (–)
D) (–); (+) E) (+); (+)

4. Si: $\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{3}{4}$; $k \in \mathbb{Z}$

Calcula:

$P = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$

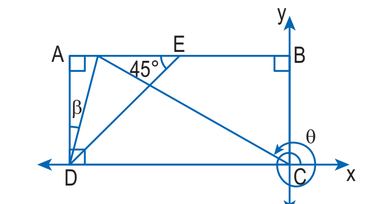
A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $-\frac{3}{5}$

5. Una persona observa la parte superior de un árbol con un ángulo de elevación 37°; 14 metros más adelante observa la cúspide del árbol con una elevación de 53°. Calcula la altura del árbol. (Talla de la persona = 1,50 m)

A) 21,5 m B) 22,5 m C) 25,5 m D) 31,5 m E) 28,5 m

6. Si ABCD es un rectángulo; AE = EB y $\tan\beta = \frac{1}{3}$.

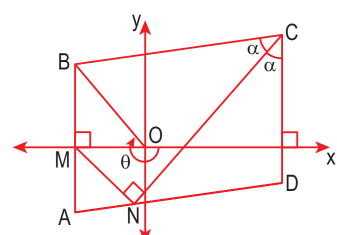
Calcula: $\tan\theta$



A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\sqrt{3}$

7. Sea ABCD un paralelogramo. Si BC = 7; CD = 5 y MA = MO, calcula: $\cot\theta$



A) $-\frac{5}{7}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{2}{7}$

D) $-\frac{4}{7}$ E) $-\frac{3}{2}$

8. Si: $\theta \in \left[-\frac{7\pi}{24}; \frac{\pi}{24}\right\rangle$

Calcula la variación de $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} - 2\theta\right)$.

A) $\left\langle -\frac{1}{2}; 1\right]$ B) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ C) $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

D) $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$ E) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\rangle$



Trigonometría
Unidad 3



Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1 Simplifica:

$z = sen^4x + cos^4x + 2sen^2xcos^2x$

A) sen^2x B) cos^2x C) 0
D) 1 E) sen^2x

2 Si: secx + tanx = 5;
halla el valor de tanx.

A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{12}{5}$

3 Simplifica:

$E = \frac{sen\phi}{1 - sen\phi} + \frac{sec\phi}{sec\phi + tan\phi} - tan^2\phi$

A) $cot^2\phi$ B) $tan^2\phi$ C) $sec^2\phi$
D) $csc^2\phi$ E) $sen^2\phi$

4 Si: senx + cosx = n;
halla: D = secx + cscx

A) $\frac{2n}{n-1}$ B) $\frac{2n}{n+1}$ C) $\frac{n}{n^2-1}$
D) $\frac{2n}{n^2-1}$ E) $\frac{2n}{1-n^2}$

5 Simplifica:

$M = sec^2x\,csc^2x - \frac{cot^3x - tan^3x}{cotx - tanx}$

A) –1 B) 1 C) 2
D) –2 E) $\frac{1}{2}$

6 Si: $tanx + cotx = 3\sqrt{2}$
calcula:
$C = sec^2x + csc^2x$

A) 9 B) 12 C) 16
D) 18 E) 36

7 Simplifica:

$C = \dfrac{\text{sen}x\tan x + \cos x}{\cos x\cot x + \text{sen}x}$

A) 1 B) tanx C) cotx
D) $\tan^2 x$ E) $\cot^2 x$

8 Si: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \dfrac{7}{9}$;
calcula:
$C = \text{sen}^6 x + \cos^6 x$

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{9}$
D) $\dfrac{2}{9}$ E) $\dfrac{4}{9}$

9 Si: $\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}$ ($\alpha \in$ IC);

calcula: $\tan\alpha + \cot\alpha$

A) $\dfrac{10}{3}$ B) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $\dfrac{13}{2\sqrt{10}}$
D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ E) $\dfrac{2\sqrt{10}}{13}$

10 Reduce:

$E = \left(\dfrac{\text{sen}x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen}x}\right)^2 - 4\cot^2 x$

A) 0 B) –4 C) 4
D) 1/2 E) –1/2

11 Si la igualdad es una identidad, calcula: M + N

$\dfrac{\csc x - \cot x}{\csc x + \cot x} + \dfrac{\csc x + \cot x}{\csc x - \cot x} = M + 4\cot^N x$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12 Reduce:

$T = \text{sen}^4\theta - \dfrac{\tan^2\theta}{1 + \csc^2\theta + \tan^2\theta}$

A) 0 B) –1 C) 2
D) 1 E) –2

13 Simplifica:
$S = (1 + \cot^2\theta)\cos^2\theta - \csc^2\theta$

A) –2 B) 2 C) –1
D) 3 E) 1

14 Si: $\text{sen}x + \csc x = 3$; calcula:
$L = \text{sen}^2 x + \csc^2 x$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

Claves

1. D	3. C	5. B	7. B	9. B	11. D	13. C
2. E	4. D	6. D	8. B	10. C	12. A	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Completa los cuadros vacíos con la expresión trigonométrica correspondiente para que se cumplan las igualdades:

I. $\dfrac{\csc x}{\cot + \tan x} = \square$

II. $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 - \square}$

III. $\dfrac{1}{\csc^2 x} + \dfrac{1}{\square} = 1$

IV. $\square . \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$

V. $\cot x + \dfrac{\square}{1 + \cos x} = \csc x$

2. De las siguientes proposiciones:

a) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$
b) $\tan x \text{sen} x + \cos x = \csc x$
c) $\cot^2 x \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$
d) $\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

¿Cuántas son verdaderas?

A) 1 B) 0 C) 2
D) 4 E) 3

Razonamiento y demostración

3. Reduce:

$A = \dfrac{\sec x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$

A) cosx B) 1 C) senx
D) cscx E) secx

4. Reduce:

$U = (\sec x \csc x - \tan x)\text{sen} x$

A) senx B) cosx C) $\text{sen}^2 x$
D) $\cos^2 x$ E) 1

5. Reduce:

$A = (3\text{sen} x + 2\cos x)^2 + (2\text{sen} x - 3\cos x)^2$

A) 3 B) 5 C) 8
D) 9 E) 13

6. Reduce:

$C = \text{sen} x \cot x + \cos x$

A) cosx B) 2cosx C) 3cosx
D) 4cosx E) 1

7. Si: $\text{sen} x - \cos x = n$; halla:

$H = \text{sen} x \cos x$

A) $\dfrac{n^2 - 1}{2}$ B) $\dfrac{n^2 + 1}{2}$ C) $\dfrac{1 - n^2}{2}$
D) $\dfrac{1 + n}{2}$ E) $\dfrac{n - 1}{2}$

8. Si: $\text{sen} x - \cos x = \dfrac{1}{3}$; calcula:

$L = \text{sen} x \cos x$

A) $\dfrac{2}{9}$ B) $\dfrac{1}{9}$ C) $\dfrac{4}{9}$
D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{1}{3}$

9. Si: $\sec x = 1 + \text{sen} x$

simplifica: $\dfrac{1 - \text{sen} x}{\cos^3 x}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) –1 E) –2

10. Si: $\tan x + \cot x = 3$; calcula:

$C = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{2}{9}$
D) $\dfrac{7}{9}$ E) $\dfrac{5}{9}$

11. Halla el valor de $\csc\alpha$, si se cumple que:

$x\cos^2\alpha - y\text{sen}\alpha = y\text{sen}^2\alpha$

A) $\dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$ B) $\dfrac{x^2 + y^2}{x}$ C) $\dfrac{x + y}{x}$
D) $\dfrac{x^2 - y^2}{x}$ E) $\dfrac{y^2 + x^2}{y^2}$

Resolución de problemas

12. Si: $f(t) = t^2 + 1$;

halla el valor de:

$(f(\text{sen}\beta) + f(\cos\beta)) . (f(\tan\beta) + f(\cot\beta))$

A) $2\sec^2\beta\csc^2\beta$
B) $2\text{sen}^2\beta\cos^2\beta$
C) $3\text{sen}^2\beta\cos^2\beta$
D) $3\sec^2\beta\csc^2\beta$
E) $\sec^2\beta\csc^2\beta$

13. Si: $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$;

$x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4} \right\rangle$

Halla el valor de:

$M = \sec^6 x - 3\sec^4 x + 3\sec x.$

A) $\dfrac{65}{64}$ B) $\dfrac{33}{32}$ C) $\dfrac{15}{16}$
D) $\dfrac{17}{16}$ E) $\dfrac{31}{32}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

14. Indica (V) verdadero o (F) falso, según corresponda:

- $\dfrac{\text{sen} x}{1 + \cos x} + \cot x = \sec x$ $\square$
- $\dfrac{\sec x - \cos x}{\csc x - \text{sen} x} = \tan^3 x$ $\square$
- $\tan x(\csc x - \text{sen} x) = \cos x$ $\square$
- $\cos x \tan x - \text{sen} x = 1$ $\square$
- $(\text{sen} x + \cos x)^2 + (\text{sen} x - \cos x)^2 = 0$ $\square$

15. En la siguiente expresión:

$P = \sec^2 x + \csc^2 x$

¿qué datos son necesarios para hallar el valor de **P**?

I. $\tan x = \cot x$
II. $\tan x + \cot x = 2$
III. $x \in$ IIIC

A) Solo I B) Solo III
C) Solo II D) I y III
E) II y III

Razonamiento y demostración

16. Reduce:

$U = \dfrac{\sec^2 x \csc^2 x - \csc^2 x}{\tan^2 x}$

A) $\sec^2 x$ B) $\csc^2 x$ C) $\sec^4 x$
D) $\csc^4 x$ E) $\tan^4 x$

17. Reduce:

$D = (\sec x \csc x - \cot x)\cos x$

A) senx B) cosx C) $\text{sen}^2 x$
D) $\cos^2 x$ E) 1

18. Reduce:

$L = (\tan x \text{sen} x + \cos x)(\cot x \cos x + \text{sen} x)$

A) 1 B) senxcosx C) tanx
D) cotx E) secxcscx

19. Simplifica:

$L = \dfrac{\sec^2 x \csc^2 x - \sec^2 x}{\cot^2 x}$

A) $\sec^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $\tan^2 x$
D) $\cot^2 x$ E) 1

20. Simplifica:

$$R = \frac{\operatorname{sen}x + \cos x}{\sec x + \csc x}$$

A) senx B) cosx C) senxcosx
D) secxcscx E) 1

21. Si: $\tan x + \cot x = 4$; calcula:
$L = \sec x + \csc x$

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

22. Si: $\tan^2 x - 3\tan x = 2$; halla:
$A = \tan x - 2\cot x$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

23. Si: $\operatorname{sen}x + \cos x = \sqrt{15}\,\operatorname{sen}x\cos x$
$\wedge\ x \in$ IIIC.
calcula: $\tan x + \cot x$

A) 2 B) 3 C) –4
D) 5 E) $-\sqrt{10}$

24. Calcula m para que E sea independiente de θ.

$E = m(\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta) + 2(\operatorname{sen}^6\theta + \cos^6\theta)$

A) –1 B) –3 C) 1
D) 2 E) –2

25. Si: $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$; calcula:
$M = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,8

Resolución de problemas

26. Una ecuación cuadrática de coeficiente principal **a**; coeficiente lineal **b** y término independiente **c**, posee como raíces a senθ y cosθ; halla la relación entre a; b y c.

A) $a^2 - 2ab = b^2$ B) $a^2 + b^2 = 2ac$
C) $a^2 + 2ac = b^2$ D) $b^2 + c^2 = 2ab$
E) $b^2 + 2bc = ab$

27. Si la función:

$R(a) = (\operatorname{sen}\alpha)^a + (\cos\alpha)^a$

halla el valor de:

$P = [R(4) - R(6)] \times R(2) \times R(-2)$

A) –1 B) –2 C) 2
D) 1/2 E) 1

NIVEL 3

Comunicación matemática

28. Compara las siguientes expresiones:

Ⓜ $(2\operatorname{sen}x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen}x - 2\cos x)^2$
Ⓝ $\operatorname{sen}^2 x + \csc^2 x$; si: $\operatorname{sen}x + \csc x = \sqrt{7}$

A) M + N = 7 B) M – N = 0
C) 2M – 3N = 0 D) 3M – 2N = 0
E) M – N = 2

29. Completa los términos que faltan en la siguiente sucesión cuadrática:

☐; 1; 2; ☐; $4 + 3\operatorname{sen}^2 x$; ...

Luego halla el primer término e indica el valor de:

$N = t_4 - t_1$

A) $\cos^2 x$; 3 B) $\operatorname{sen}^2 x$; 3
C) 4; $\cos^2 x$ D) $2 + \operatorname{sen}^2 x$; 2
E) 5; $\operatorname{sen}^2 x$

Razonamiento y demostración

30. Simplifica:

$$M = \frac{\sec^4 x - \sec^2 x}{\csc^4 x - \csc^2 x}$$

A) $\tan^2 x$ B) $\tan^4 x$ C) $\tan^6 x$
D) $\tan^3 x$ E) $\tan^5 x$

31. Si: $\tan x - \cot x = 2$; calcula:
$E = \tan^2 x + \cot^2 x$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 16

32. Simplifica:

$$A = \frac{\sec x - \tan x - 2}{\csc x - 2\cot x - 1}$$

A) tanx B) 1 C) cotx
D) –1 E) 2tanx

33. Halla n, si se cumple que:
$\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = n\operatorname{sen}^2 x$

A) $\operatorname{sen}^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $\tan^2 x$
D) $\cot^2 x$ E) $\sec^2 x$

34. Reduce la siguiente expresión:

$$E = \frac{(\cos x\tan x - \operatorname{sen}x\cot x)^2 - 1}{2\cos x}$$

A) senx B) –senx C) tanx
D) cotx E) –cotx

35. Elimina x, a partir de:

$\tan x + \cot x = a$
$\tan x - \cot x = b$

A) $a^2 + b^2 = 3$ B) $a^2 - b^2 = 3$
C) $a^2 - b^2 = 4$ D) $a^2 + b^2 = 4$
E) $a^2 + b^2 = 8$

36. Si: $\cot^2 x = \csc x$, halla: $E = \cos^4 x + \cos^2 x$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 1/2
D) 1/4 E) –1

Resolución de problemas

37. Simplifica la siguiente expresión si: (θ; β ∈ IC):

$$M = \sqrt{(1 - \cos\theta\cos\beta)^2 - (\cos\theta - \cos\beta)^2}$$

Luego halla la suma de los factores finales.

A) senβsenθ B) cosβcosθ
C) cosβ + senθ D) senβ + senθ
E) senβ + cosθ

38. Simplifica la siguiente expresión, si (θ ∈ IVC ∧ β ∈ IIIC):

$$N = \sqrt{(1 - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta)^2 - (\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\beta)^2}$$

Luego halla la suma de sus factores.

A) cosθcosβ B) senβsenθ
C) senβ + senθ D) cosβ + cosθ
E) cosθ – cosβ

39. Si: $\tan x + \cot x = 3$, halla el valor de:
$B = \tan^6 x + \cot^6 x$

A) 320 B) 322 C) 321
D) 300 E) 312

Claves

NIVEL 1
1.
2. C
3. E
4. B
5. E
6. B
7. C
8. C
9. B
10. D
11. C
12. D
13. A

NIVEL 2
14.
15. C
16. B
17. A
18. E
19. A
20. C
21. B
22. C
23. B
24. B
25. D
26. C
27. E

NIVEL 3
28. B
29. B
30. C
31. C
32. A
33. C
34. B
35. C
36. A
37. D
38. E
39. B



Aplicamos lo aprendido



TEMA 2: ÁNGULOS COMPUESTOS

1 Simplifica:

$$C = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}\beta\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta) - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}$$

A) $\tan\alpha$ B) $\tan\beta$ C) $\cot\alpha$
D) $\cot\beta$ E) 1

2 Siendo: $\tan x = 5$ y $\tan\beta = 3$
Calcula: $\tan(x + \beta)$

A) $-\frac{2}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{4}{7}$
D) $-\frac{4}{7}$ E) $-\frac{6}{7}$

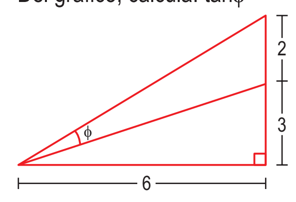
3 Halla x (ángulo agudo), si:
$\text{sen}(40° + x) + \text{sen}(40° - x) = \text{sen}40°$

A) 30° B) 15° C) 20°
D) 40° E) 60°

4 Reduce:
$A = (\cos x + \cos y)^2 + (\text{sen}x - \text{sen}y)^2$,
si: $x + y = \frac{\pi}{4}$

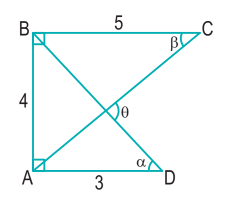
A) 3 B) 2 C) $2 + 2\sqrt{2}$
D) $2 + \sqrt{2}$ E) $3 + \sqrt{2}$

5 Del gráfico, calcula: $\tan\phi$



A) $\frac{2}{17}$ B) $\frac{3}{17}$ C) $\frac{4}{17}$
D) $\frac{5}{17}$ E) $\frac{6}{17}$

6 Del gráfico, halla: $\tan\theta$



A) 16 B) –16 C) 32
D) –32 E) 64

7 Si: $x + y + z = 180°$; además: $\tan x = 5$; $\tan y = 3$. Calcula: $\tan z$.

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

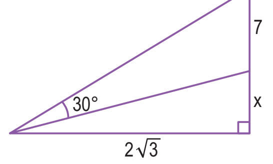
8 En un $\triangle ABC$:
$$\frac{\cot A}{3} = \frac{\cot B}{5} = \frac{\cot C}{6}$$
Calcula: $\cot C$.

A) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ B) $\frac{4}{\sqrt{7}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{7}}$
D) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

9 Si: $\tan\beta = \frac{2}{3} \wedge \beta \in IC$; calcula: $A = \text{sen}(45° + \beta)$

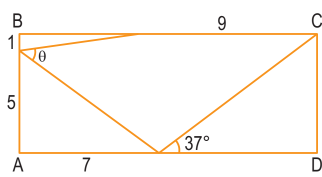
A) $\frac{3}{\sqrt{26}}$ B) $\frac{8}{\sqrt{26}}$ C) $\frac{5}{\sqrt{26}}$
D) $\frac{7}{\sqrt{26}}$ E) $\frac{9}{\sqrt{26}}$

10 Del gráfico, calcula x.



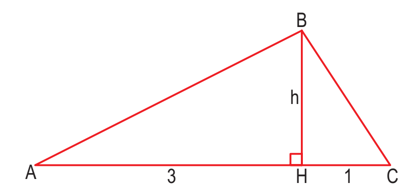
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

11 Calcula $\tan\theta$, si ABCD es un rectángulo.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12 Calcula h, considera $m\angle ABC = 135°$.

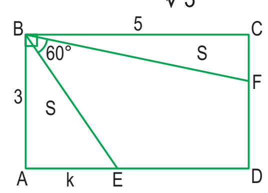


A) $\sqrt{7} - 1$ B) $\sqrt{5} - 2$ C) $\sqrt{7} + 2$
D) $\sqrt{7} + 1$ E) $\sqrt{7} - 2$

13 Calcula $\tan(\theta - \alpha)$, si: $AB = 1$; $AE = 3$ y $EC = 2$.

A) –5/41 B) 5/41 C) 3/41
D) –3/41 E) 1

14 Halla: $E = k^2 + \frac{34k}{\sqrt{3}}$, si ABCD es un rectángulo.



A) 1 B) 5 C) 25
D) 125 E) 50

Claves

1. B	3. E	5. C	7. D	9. C	11. A	13. D
2. D	4. D	6. D	8. E	10. A	12. E	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. **CRUCIGRAMA**

Completa el siguiente crucigrama y descubre el nombre de un matemático.

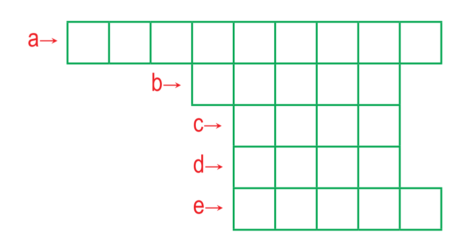
b. Tipo de ángulo formado por la suma a diferencia de dos o más ángulos simples.

c. Tipo de ángulo cuya medida es menor que 90°.

d. Primera letra del alfabeto griego.

e. Cateto opuesto entre hipotenusa.

f. Tipo de ángulo mayor que 180° y menor que 90°.



2. Completa:

$\tan(\alpha + \beta) =$

$\tan(\alpha - \beta) =$

Razonamiento y demostración

3. Reduce:

$J = \text{sen}(30° + x) + \text{sen}(30° - x)$

A) 2senx B) cosx C) 2cosx

D) senx E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Reduce:

$J = \cos(45° + x) + \cos(45° - x)$

A) cosx B) senx C) $\sqrt{2}\cos x$

D) $\sqrt{3}\cos x$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Halla el valor de sen7°.

A) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ B) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ C) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

D) $\frac{3\sqrt{3}-4}{5}$ E) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$

6. Calcula tan8°.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{11}$

7. Simplifica:

$E = \sqrt{2}\cos(45° + x) - \cos x$

A) 1 B) –senx C) senx

D) 2senx E) 2

8. Si: $\tan\alpha = \frac{1}{3} \wedge \tan\beta = \frac{2}{5}$

Calcula: $\tan(\alpha - \beta)$

A) $\frac{1}{7}$ B) $-\frac{1}{7}$ C) $\frac{1}{17}$

D) $-\frac{1}{17}$ E) $-\frac{1}{19}$

9. Si: $\text{sen}x = \frac{3}{5} \wedge \text{sen}z = \frac{24}{25}$

Calcula: $E = \text{sen}(x + z)$; x; z son agudos.

A) $\frac{127}{225}$ B) $\frac{125}{117}$ C) $\frac{117}{222}$

D) $\frac{117}{125}$ E) $\frac{39}{25}$

10. Si: $\tan(A - B) = 2$ y $\tan B = \frac{1}{3}$

Calcula tanA.

A) $\frac{1}{7}$ B) 7 C) $-\frac{1}{7}$

D) –7 E) $\frac{1}{5}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Completa:

sen3x . ( ) + cos3x . ( ) = sen4x

cos4x . ( ) – sen4x . ( ) = cos6x

sen6x . ( ) – cos6x . ( ) = sen3x

12. Indica verdadero(V) o falso(F) según corresponda:

I. $\tan(A + B) = \tan A + \tan B + \tan A\tan B\tan(A + B)$ ( )

II. $\text{sen}(A + B) = \text{sen}A + \text{sen}B$ ( )

III. $\cos(A - B) = \cos A\cos B - \text{sen}A\,\text{sen}B$ ( )

Razonamiento y demostración

13. Si: $\tan x = \frac{3}{4}$; $\sec y = \frac{13}{5}$; (x e y ∈ IC)

Calcula sen(x + y).

A) $\frac{61}{65}$ B) $\frac{62}{65}$ C) $\frac{63}{65}$

D) $\frac{64}{65}$ E) 2

14. Si: $\tan(x - y) = 2 \wedge \tan y = \frac{1}{3}$

Calcula cotx.

A) 7 B) $\frac{1}{7}$ C) $-\frac{1}{7}$ D) –7 E) $\frac{1}{5}$

15. Reduce:

$E = \cos 10° - \sqrt{3}\,\text{sen}10°$

A) 2sen20° B) 2sen40° C) sen40°
D) cos40° E) 1

16. Si: $\tan x \tan y = \frac{1}{5} \wedge \text{sen}x\,\text{sen}y = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Calcula: cos(x – y).

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{6}$

17. Calcula: $E = (\text{sen}17° + \cos 13°)^2 + (\text{sen}13° + \cos 17°)^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E)5

18. Halla el valor agudo de x que verifique:

$\cos 4x \cos x - \text{sen}4x\,\text{sen}x = \frac{1}{2}$

A) 6° B) 12° C) 18° D) 21° E) 24°

19. Halla un valor agudo de x para que cumpla:

$\text{sen}4x\cos x - \text{sen}x\cos 4x = 0{,}5$

A) 5° B) 10° C) 15° D) 20° E) 30°

20. Simplifica: $M = \dfrac{\cos(30° - x) + \cos(30° + x)}{\text{sen}(30° - x) + \text{sen}(30° + x)}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $3\sqrt{3}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica verdadero o falso según corresponda:

I. $\text{sen}A\cos B + \text{sen}B\cos A = \text{sen}(A + B)$ ( )

II. $\text{sen}86°\cos 20° - \cos 86°\text{sen}20° = \cos 24°$ ( )

III. $\cos 39°\cos 28° - \cos 51°\text{sen}28° = \text{sen}23°$ ( )

22. Relaciona según corresponda, si α es agudo:

$\text{sen}2\alpha\cos\alpha + \text{sen}\alpha\cos 2\alpha = \text{sen}45°$	α = 43
$\cos 5\alpha\cos 3\alpha + \text{sen}5\alpha\,\text{sen}3\alpha = \text{sen}86°$	α = 25°
$\text{sen}4\alpha\cos 20° - \cos 4\alpha\,\text{sen}20° = \text{sen}80°$	α = 15°

Razonamiento y demostración

23. Calcula: $E = \tan 27° + \tan 18° + \tan 27°\tan 18°$

A) 1 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) 3

24. Calcula: $E = \sqrt{3}\tan 80°(\tan 50° - \tan 40°)$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

25. Si: $\tan\alpha + \tan\beta = 1 \wedge \tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$; (α ∈ IC)

Calcula: tan(α – β).

A) 0 B) 1 C) 2 D) –2 E) –3

26. Si: tanx + tany = a ∧ cotx + coty = b, calcula tan(x + y).

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{ab}{a+b}$
D) $\frac{ab}{b-a}$ E) $\frac{a}{a+b}$

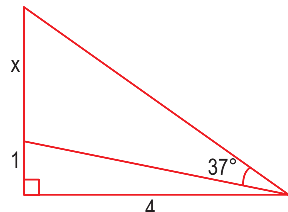
27. Simplifica: $E = \dfrac{\text{sen}(x + y)}{\cos(x - y) - \text{sen}x\,\text{sen}y} - \tan y$

A) 0 B) tanx C) cosx D) senx E) cotx

28. Calcula: $E = \dfrac{\tan 18°}{\tan 54° - \tan 36°}$

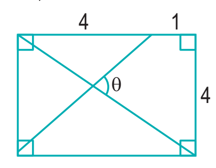
A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) –2

29. Del gráfico mostrado, calcula: x



A) $\frac{17}{13}$ B) $\frac{13}{17}$ C) $\frac{51}{13}$ D) $\frac{13}{51}$ E) 3

30. Del gráfico mostrado, calcula: tanθ



A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{4}$ E) 9

Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. B
4. C
5. A
6. C
7. B
8. D
9. D
10. B

NIVEL 2
11.
12.
13. C
14. B
15. A
16. D
17. C
18. B
19. B
20. C

NIVEL 3
21.
22.
23. A
24. D
25. E
26. D
27. B
28. C
29. C
30. E



Aplicamos lo aprendido



TEMA 3: ÁNGULOS MÚLTIPLES

1 Si: $\tan(45° - x) = 4$, calcula $\tan 2x$.

A) $\frac{4}{3}$ B) $-\frac{8}{7}$ C) $-\frac{15}{8}$
D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

2 Calcula:
$K = (2 + 2\cos 35°)(1 - \cos 35°) + 2\text{sen}10°\cos 10°$

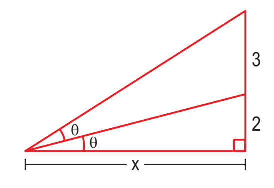
A) 0 B) 1 C) 2
D) –2 E) –1

3 Calcula:

$$E = \frac{1}{6\text{sen}18°\cos 36°}$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

4 Halla: x



A) $5\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$
D) $\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{5}$

5 ¿A qué es igual?
$F = \sec 76° - \tan 76°$

A) cot14° B) tan76° C) csc76°
D) cot7° E) tan7°

6 Simplifica:

$$E = \frac{\cot\frac{x}{4} - \tan\frac{x}{4}}{\csc x + \cot x}$$

A) –1 B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) –2

7 Si: $3\tan x = 2\cos x$, calcula: $\operatorname{sen}3x$

A) 1 B) $\pm\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

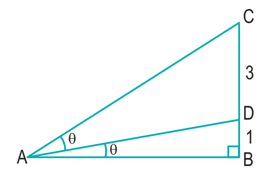
8 Si: $\frac{3\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{7\cos 3\theta}{\cos\theta} = 1$

Calcula: $\cos 6\theta$

A) 1 B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{9}{11}$

D) $\frac{13}{17}$ E) $-\frac{11}{16}$

9 Calcula $\tan\theta$.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{2}{3}$

10 Si: $2\operatorname{sen}2\theta = 3\operatorname{sen}\theta \wedge \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

Calcula: $2\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \sqrt{7}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

A) $-\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) $-3\sqrt{2}$

D) $-4\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{14}$

11 Simplifica:

$M = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cot\theta + \tan\frac{\theta}{2}$

A) $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$ B) $\cos\frac{\theta}{2}$ C) $\operatorname{sen}^2\theta$

D) $\tan\theta$ E) $\operatorname{sen}\theta$

12 Si: $\tan\theta\sec 2x - \tan 2x\tan x - 1 = 0$, calcula: $\tan\theta$

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) 0

D) 2 E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13 Calcula:

$M = \frac{12(4\cos^2 16° - 3)}{5\operatorname{sen}21°\cos 21°}$

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

14 Si: $\operatorname{sen}2\theta = \frac{1}{3}$

Calcula: $\frac{\sec^3\theta - \csc^3\theta}{(\sec\theta - \csc\theta)\sec^2\theta\csc^2\theta}$

A) 2/3 B) 7/3 C) 7/6

D) 2/7 E) 6/7

Claves

1. C	3. A	5. E	7. A	9. B	11. E	13. C
2. B	4. C	6. B	8. E	10. C	12. B	14. C

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona según corresponda:

csc2θ •	• $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$
cot2θ •	• $\dfrac{\cot\theta+\tan\theta}{2}$
sen2θ •	• $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{2}$

2. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $2\csc60° = \cot30° + \tan30°$ ( )

II. $2\cot74° = \cot37° - \tan37°$ ( )

III. $2\text{sen}^2 2\alpha = 1 - \cos4\alpha$ ( )

Razonamiento y demostración

3. A qué es igual: $\tan54° + \tan36°$

A) 2sec18° B) sec18°
C) 2csc18° D) csc18°
E) 2cot72°

4. Calcula: tan7°30'

A) $\sqrt{6}-\sqrt{4}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$
B) $\sqrt{6}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$
C) $\sqrt{6}-\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}+\sqrt{4}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$
E) $\sqrt{6}+\sqrt{4}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$

5. Calcula: $M = \tan^2 2x - \tan2x - 1$, si: $\tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

A) 7 B) 5 C) 9
D) 6 E) 4

6. Calcula:

$$E = \tan\frac{\pi}{8} - \cot\frac{\pi}{8}$$

A) –2 B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) $-2\sqrt{2}$ E) 0

7. Simplifica:

$$P = \sqrt{\frac{1-\text{sen}40°}{1+\text{sen}40°}}$$

A) tan30° B) $\frac{1}{2}$ C) tan25°
D) $\frac{3}{4}$ E) tan40°

8. Calcula:

$$E = \sqrt{\frac{1-\cos200°}{1+\cos200°}}$$

A) –tan100° B) tan100°
C) tan400° D) –tan400°
E) 1

Resolución de problemas

9. Si el coseno de un ángulo agudo es $\frac{3}{5}$, ¿cuál es el seno de la mitad de dicho ángulo?

A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

10. Si el coseno de un ángulo agudo es $\frac{2}{3}$, ¿cuál es el coseno de la mitad de dicho ángulo?

A) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ B) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ C) $\sqrt{\frac{1}{3}}$
D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Relaciona según corresponda:

$\tan\frac{\theta}{2}$ •	• cscθ + cotθ
$\cot\frac{\theta}{2}$ •	• $\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$
$\text{sen}\frac{\theta}{2}$ •	• cscθ – cotθ

12. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $\tan60° = \csc120° - \cot120°$ ( )

II. $\cot10° = \csc20° + \cot20°$ ( )

III. $\cos150° = \sqrt{\frac{1+\cos300°}{2}}$ ( )

Razonamiento y demostración

13. Reduce:

$$\frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}{1+\cos2\alpha+\cos\alpha}$$

A) tanα B) cotα C) secα
D) cscα E) cosα

14. Sabiendo que $\text{sen}x - \cos x = \frac{1}{5}$ y que $0° < x < 45°$, determina: tan2x

A) $\frac{24}{7}$ B) $\frac{7}{24}$ C) $\frac{24}{25}$
D) $\frac{7}{25}$ E) $\frac{5}{12}$

15. Simplifica:

$$E = \sqrt{1-\text{sen}20°} + \text{sen}10°$$

A) cos10° B) sen10°
C) –cos10° D) –sen10°
E) 0

16. Sabiendo que $\tan\alpha = 3$; calcula: cos4α

A) $\frac{24}{25}$ B) $\frac{7}{25}$ C) $\frac{12}{13}$
D) $\frac{5}{13}$ E) $\frac{3}{5}$

17. Reduce:

$$\frac{\text{sen}\theta\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{\text{sen}\theta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\theta}$$

A) cosθ B) tanθ
C) cotθ D) $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$
E) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

18. Halla $\frac{\text{sen}4\theta}{\cos\theta}$ a partir de la expresión:

$$\frac{\cos4\theta}{\cos2\theta+\text{sen}2\theta} + \frac{\text{sen}4\theta}{2\cos2\theta} = \frac{\csc\theta}{5}$$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

Resolución de problemas

19. Si la tangente de un ángulo agudo es 2, ¿cuál es el seno del doble de dicho ángulo?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

20. Si la tangente de un ángulo agudo es 3, ¿cuál es el coseno del doble de dicho ángulo?

A) $\frac{1}{8}$ B) $-\frac{3}{7}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{4}{5}$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Relaciona según corresponda:

$\text{sen}3\theta$ •	• $4\cos\theta\cos(60° - \theta)\cos(60° + \theta)$
$\cos3\theta$ •	• $\tan\theta\tan(60° - \theta)\tan(60° + \theta)$
$\tan3\theta$ •	• $4\text{sen}\theta\,\text{sen}(60° - \theta)\text{sen}(60° + \theta)$

22. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\text{sen}30° = 4\text{sen}10°\text{sen}50°\text{sen}70°$ 

II. $\cos45° = 4\cos15\cos45°\cos75°$

III. $\tan60° = \tan20° \tan40° \tan80°$

Razonamiento y demostración

23. Calcula el valor de F, si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ y $\cos\theta = -\frac{3}{4}$.

$$F = \sqrt{7}\,\text{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$

D) 2 E) $2\sqrt{2}$

24. Reduce:

$$M = \frac{1}{\text{sen}x} + \frac{1}{\text{sen}2x} + \frac{1}{\text{sen}4x} + \frac{\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x}{\text{sen}4x}$$

A) $\csc\frac{x}{2}$ B) $\text{sen}\frac{x}{2}$ C) $\cot\frac{x}{2}$

D) $\tan\frac{x}{2}$ E) $\sec\frac{x}{2}$

25. Si: $\frac{\cos\theta}{a} = \frac{\text{sen}\theta}{b}$, a qué es igual:

$$E = a\cos2\theta + b\,\text{sen}2\theta$$

A) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ B) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ C) a

D) b E) a + b

26. Si: $\cot x - \tan x = k$, halla: $\tan4x$

A) $\frac{4k}{k^2 - 4}$ B) $\frac{2k}{k^2 - 4}$ C) $\frac{4k}{4 - k^2}$

D) $\frac{2k}{4 - k^2}$ E) $\frac{2k}{k^2 + 4}$

27. Si $\text{sen}\alpha = \frac{a - b}{a + b}$, calcula: $k = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

A) $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ B) $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ C) $\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

D) $\pm\sqrt{\frac{1}{b}}$ E) $\pm\sqrt{\frac{a + b}{a - b}}$

28. Calcula la suma de los primeros términos de la serie:

$$\tan x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

A) $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} - 2\cot x$ B) $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} - 2\tan2x$

C) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - 2\tan2x$ D) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - 2\cot2x$

E) $\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} + 2\tan2x$

Resolución de problemas

29. Si la cotangente de un ángulo agudo es 2, ¿cuál es la tangente del triple de dicho ángulo?

A) $\frac{11}{6}$ B) $\frac{11}{3}$ C) $\frac{11}{5}$

D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{11}{4}$

30. Si la secante de un ángulo agudo es 3, ¿cuál es el coseno del triple de dicho ángulo?

A) $-\frac{11}{13}$ B) $-\frac{23}{27}$ C) $\frac{21}{8}$

D) $-\frac{7}{8}$ E) $-\frac{1}{9}$

Claves

NIVEL 1	7. C	13. A	20. E	26. A
1.	8. A	14. A	NIVEL 3	27. B
2.	9. A	15. A	21.	28. D
3. A	10. E	16. B	22.	29. D
4. C	NIVEL 2	17. A	23. E	30. B
5. B	11.	18. C	24. C	
6. A	12.	19. A	25. C	






TEMA 4: TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Si: $\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{4}$; calcula: $P = 64\,\text{sen}\frac{5A}{4}\,\text{sen}\frac{3A}{4}$

A) 9 B) –9 C) 8
D) 16 E) – 8

2 Transforma a producto la siguiente suma:
$A = 3 + \sqrt{3}$

A) 2sen10° B) $2\sqrt{6}$ sen15° C) $2\sqrt{6}$ cos15°
D) $2\sqrt{6}$ cos15° E) cos15°

3 Factoriza:
$y = \frac{3}{\text{sen}^2x} - 4$

A) $\text{sen}2x\,\text{sen}^{-2}x$ B) $\text{sen}3x\,\text{sen}^{-2}x$ C) $\text{sen}3x\,\text{sen}^{-3}x$
D) $\cos2x\,\text{sen}^{-3}x$ E) $\cos3x\cos^{-3}x$

4 Calcula:
$N = \frac{\cos2\alpha + 2\cos\alpha + 1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

A) 4cosα B) 2senα C) 4senα
D) sen4α E) cos4α

5 A qué es igual:
$R = 2\cos2x\cos3x - \cos x$

A) cos2x B) cos3x C) cos5x
D) cos7x E) 0

6 Simplifica:
$R = \text{sen}3x\,\text{sen}7x + \cos2x\cos8x$

A) –sen5xsenx B) sen5xsenx C) –cos5xcosx
D) cos5xcosx E) sen10xcosx

7 Simplifica:

$$B = \frac{\text{sen}5x + \text{sen}2x - \text{sen}x}{\text{sen}2x}$$

A) cos3x B) 2cos3x C) 2cos3x + 1
D) 2cos3x – 1 E) 2cos2x

8 Simplifica:

$$P = \frac{\text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}5x + \text{sen}7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$$

A) tan8x B) sen3x C) sen2x
D) cot4x E) tan4x

9 Halla el valor de:

$$F = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ si: sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) – 1/2
D) 4 E) 8

10 Simplifica:

$$K = \frac{2\ \text{sen}40^\circ}{\text{sen}60^\circ + \text{sen}20^\circ}$$

A) sen20° B) cos40° C) sec20°
D) csc20° E) sec40°

11 Calcula el valor de:

$A = \text{sen}1^\circ + \text{sen}2^\circ + \text{sen}3^\circ + ... + \text{sen}180^\circ$

A) $\frac{\text{sen}89,5^\circ}{\text{sen}0,5^\circ}$ B) $\frac{\cos 90,5^\circ}{\cos 0,5^\circ}$ C) $\frac{\cos 91,5^\circ}{\cos 0,5^\circ}$
D) $\frac{\text{sen}90,5^\circ}{\text{sen}0,5^\circ}$ E) sen90,5°

12 En qué tipo de triángulo ABC, se cumple:

senAsenB = cosC

A) Equilátero B) Isósceles
C) Rectángulo D) Escaleno
E) Acutángulo

13 Calcula el máximo valor de:

$S = \text{sen}(x + 30^\circ)\cos x$

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14 Calcula: A + B + C

Si: sen8x + sen4x = AsenBxcosCx

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Claves

1. B	3. C	5. C	7. C	9. B	11. D	13. A
2. C	4. A	6. D	8. E	10. D	12. C	14. D

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Transforma a suma o diferencia.

- sen52°sen88° = ____________
- $\text{sen}\theta\cos3\theta$ = ____________
- $2\cos3\theta\cos\theta$ = ____________
- sen3xsen7x = ____________
- cos2xcos8x = ____________
- $\text{sen}3\theta\text{sen}5\theta$ = ____________

2. Transforma las siguientes sumas y diferencias a productos.

- $\cos5\theta + \cos\theta$ = ____________
- sen4x + sen2x = ____________
- cos19° – cos9° = ____________
- cos3x + cos4x = ____________
- $\text{sen}\,\frac{\pi}{9} + \text{sen}\,\frac{\pi}{10}$ = ____________
- sen4x + cos8x = ____________
- sen6x + cos4x = ____________

Razonamiento y demostración

3. Simplifica:

$$H = \frac{1 - \text{sen}^2x - \text{sen}^2y}{\cos(x - y)}$$

A) cos(x + y) B) cos(x – y)
C) 0,5cos(x+y) D) cos2(x + y)
E) cos2(x – y)

4. Calcula:

$$L = \frac{\text{sen}80° + \text{sen}40°}{\cos80° + \cos40°}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

5. Transforma a producto:
H = 1 + cos2x + cos4x + cos6x

A) 4senxsen2xsen3x
B) 4cosxcos2xcos3x
C) 4cosxcos2xcos4x
D) 4senxcos2xcos4x
E) 4cosxcos2xsen4x

6. Transforma a producto:
M = sen3x + sen5x + sen8x

A) 4sen4xcos3xcos5x
B) $4\text{sen}4x\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$
C) 4cos4xcos3xcos5x
D) $4\cos4x\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$
E) $4\text{sen}4x\text{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

7. Reduce:

$$K = \frac{\text{sen}50° + \cos50°}{\cos5°}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Reduce:

$$M = \frac{\text{sen}40° + \text{sen}20°}{\cos 10°}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) –1
D) $-\frac{1}{2}$ E) 2

9. Calcula:
S = cos20° + cos100° + cos140°

A) 0 B) 1 C) –1
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

10. Calcula: (sen38° + cos68°)sec8°

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

Resolución de problemas

11. Utilizando la teoría de series trigonométricas. Calcula la suma de los k primeros términos de la siguiente serie:

$$P = \cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + ...$$

A) $\frac{1}{2}\left[\left(k + \frac{\cos k\theta}{\cos\theta}\right)\cos(\theta + k\theta)\right]$

B) $\frac{1}{2}\left[\left(k + \frac{\text{sen}k\theta}{\text{sen}\theta}\right)\cos(\theta + k\theta)\right]$

C) $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{2} + \frac{\cos k\theta}{\cos\theta}\right)\cos k\theta\right]$

D) $\frac{1}{2}\left[\left(k + \frac{\text{sen}k\theta}{\text{sen}\theta}\right)\cos k\theta\right]$

E) $1 + \cos\theta k$

12. Calcula el valor aproximado de:
M = sen74°sen34° – sen52°sen88°

A) –2 B) 2 C) –1
D) 1/2 E) –1/4

NIVEL 2

Comunicación matemática

13. De los productos trigonométricos relaciona cada expresión con su respectivo resultado:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) \times \text{sen}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \times \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \times ... \times \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) \times \tan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \times \tan\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \times ... \times \tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \times \cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \times ... \times \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)$

I. $1/2^n$
II. $\sqrt{2n+1}/2^n$
III. $\sqrt{2n+1}$

A) Ia-IIb-IIIc B) Ia-IIc-IIIb
C) Ic-IIb-IIIa D) Ic-IIa-IIIb
E) Ib-IIa-IIIc

14. De las siguientes transformaciones de suma o diferencia.

- $\text{senA} - \text{senB} = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-A}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\text{senA} + \text{senB} = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

¿Cuántas son verdaderas?

A) 3 B) 2 C) 1
D) 0 E) 4

Razonamiento y demostración

15. En un triángulo ABC, transforma a producto.

K = senA + senB + senC

A) $\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

B) $2\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

C) $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

D) $8\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

E) $4\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$

16. En un triángulo ABC, transforma a producto:

F = sen2A + sen2B – sen2C

A) 4senAsenBcosC
B) 4cosAcosBsenC
C) 4senAsenBsenC
D) 4cosAcosBcosC
E) 2senAsenBcosC

17. Si: $x + y = 30°$, calcula:

$$H = \frac{\text{sen}(x+3y)+\text{sen}(3x+y)}{\text{sen}2x+\text{sen}2y}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) –1

18. Calcula:

H = cos20° + cos100° + cos220°

A) 1 B) –1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) 0

19. Si se cumple $x = y + 30°$; calcula:

$$P = \frac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}^2x-\text{sen}^2y}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 2
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

20. Simplifica:

$$A = \frac{\cos(a-3b)-\cos(3a-b)}{\text{sen}2a+\text{sen}2b}$$

A) 2sen(a + b) B) 2cos(a + b)
C) sen(a – b) D) 2sen(a – b)
E) 2cos(a – b)

Resolución de problemas

21. Si:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2(x-\alpha) + \text{sen}^2(x+\alpha) = 2$
Halla el valor de sen2x, en términos de α.

A) $\frac{1+2\cos2\alpha}{2\text{sen}2\alpha}$

B) $\frac{1+\text{sen}2\alpha}{\cos2\alpha}$

C) $\frac{1+\cos2\alpha}{\text{sen}2\alpha}$

D) $\frac{1-2\cos2\alpha}{\text{sen}2\alpha}$

E) $\frac{1+2\cos2\alpha}{\text{sen}2\alpha}$

22. Halla el valor de la siguiente expresión:

$$C = \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$$

A) 1 B) 1/2 C) –2
D) – 1/2 E) – 1

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Compara las siguientes cantidades:

M: El máximo valor de:
P = sen(x + 53°)cosx

N: El máximo valor de:
T = sen(x + 37°)senx

A) M = 2N B) 2M = N C) M = N
D) 3M = N E) M = 3N

24. En qué tipo de triángulo ABC se cumple:

$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1$

A) Obtusángulo
B) Acutángulo
C) Equilátero
D) Rectángulo
E) Escaleno

Razonamiento y demostración

25. Simplifica:

$$R = \frac{\cos7x+\cos3x}{\text{sen}7x-\text{sen}3x}$$

A) tanx B) cotx C) tan2x
D) cot2x E) tan4x

26. Simplifica:

$$T = \frac{\cos x+\cos7x}{\text{sen}x+\text{sen}7x} + \frac{2\cos x}{\text{sen}5x+\text{sen}3x}$$

A) tanx B) tan2x C) cotx
D) cot2x E) tan4x

27. Simplifica:

$$P = \frac{\text{sen}7x+\text{sen}3x}{\text{sen}x+\text{sen}9x};\ 6x = \pi$$

A) 1 B) –1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

28. Reduce:

$$M = \frac{\text{sen}5\theta+\text{sen}3\theta+\text{sen}\theta}{\cos5\theta+\cos3\theta+\cos\theta}$$

A) tan3θ B) tan5θ C) tan2θ
D) tan4θ E) tan8θ

29. Transforma a producto:
$R = \text{sen}\alpha + \text{sen}3\alpha + \text{sen}5\alpha + \text{sen}7\alpha$

A) 4sen4αsen2αsenα
B) 4cos4αcos2αcosα
C) 4sen4αcos2αcosα
D) 4sen4αsen2αcosα
E) 4cos4αcos2αsenα

30. Reduce: $A = \frac{\text{sen}2x+\text{sen}4x+\text{sen}6x}{\cos2x+\cos4x+\cos6x}$

A) tanx B) tan2x C) tan3x
D) tan4x E) tan5x

31. Simplifica: $(\cot2\theta + \tan\theta)(\cos3\theta + \cos\theta)\text{sen}\theta$

A) 2sen3θ B) 2cos3θ C) sen3θ
D) cos2θ E) 1

Resolución de problemas

32. Si los ángulos α; β y θ están en progresión aritmética de razón 120°. Halla la suma de los cosenos de α; β y θ.

A) 1 B) 0 C) –1 D) 2 E) 1/2

33. Calcula la suma de los n primeros términos de la siguiente serie:
P = tanxtan2x + tan2xtan3x + tan3xtan4x + ...

A) tannxtanx – ntanx
B) tan(n + 1)xcotx + ntanx
C) tan(n + 1)xcotx – ntanx
D) tannxtanx – (n + 1)tanx
E) cotxtan(n + 1)x – (n + 1)

Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. A
4. C
5. B
6. B
7. B
8. A
9. A
10. A
11. B
12. E

NIVEL 2
13. D
14. B
15. C
16. B
17. C
18. E
19. C
20. D
21. A
22. D

NIVEL 3
23. C
24. D
25. D
26. D
27. B
28. A
29. C
30. D
31. D
32. B
33. E



Aplicamos lo aprendido



TEMA 5: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Determina el dominio de la función:

$g(x) = \dfrac{\text{senx} + 1}{\cos x - \text{senx}}$

A) $\mathbb{R} - \{(2n-1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$
B) $\mathbb{R} - \{(4n+1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\}$
C) $\mathbb{R} - \{(4n+1)\frac{\pi}{8} / n \in \mathbb{Z}\}$
D) $\mathbb{R} - \{(2n+3)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$
E) $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\}$

2 Halla el rango de:

$F(x) = 3 + (\text{senx})(\cos x)$

A) $[2; 4]$
B) $[3; 4]$
C) $[5; 7]$
D) $\left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$
E) $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$

3 Si $f(x) = \cos x(\cos x - 4)$ y el $\text{Ran}(f) = [a; b]$;
calcula: $H = a^2 + b^2 - ab$

A) 18
B) 49
C) 61
D) 24
E) 27

4 Halla el dominio de la función:

$F(x) = \tan 2x + \sec 2x + 2x$

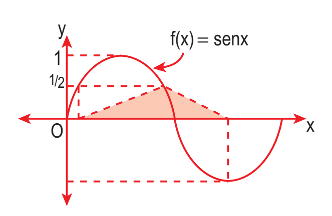
A) $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$
B) $\mathbb{R} - \{(3n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$
C) $\mathbb{R} - \{(2n+3)\frac{\pi}{5} / n \in \mathbb{Z}\}$
D) $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\}$
E) $\mathbb{R} - \{(3n+2)\frac{\pi}{8} / n \in \mathbb{Z}\}$

5 Halla el rango de la siguiente función:

$H(x) = \tan x + \cot x$

A) $\mathbb{R} - [-2; 2]$
B) $[-2; 2]$
C) $\mathbb{R} - \langle -2; 2 \rangle$
D) $\langle -2; 2 \rangle$
E) $\langle -1; 1 \rangle$

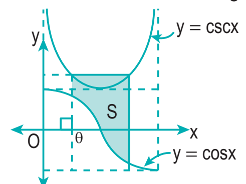
6 Del gráfico, calcula el área de la región sombreada.



A) $\frac{\pi}{2}u^2$
B) $\frac{\pi}{3}u^2$
C) $\frac{\pi}{4}u^2$
D) $\frac{\pi}{6}u^2$
E) $\frac{\pi}{8}u^2$

7 Del gráfico, calcula $A = \tan 2\theta \cot\left(\dfrac{S}{\csc\theta}\right)$

Si: S es el área de la región sombreada



A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 1
D) $\sqrt{3}$ E) -1

8 Del gráfico, calcula el área de la región sombreada.

$f(x) = \tan\dfrac{x}{2}$

$g(x) = \operatorname{sen} x$

A) $\sqrt{3}\,\pi$ B) $2\sqrt{3}\,\pi$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$
D) 3π E) 4π

9 Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda en:

I. La función y = F(x) = senx + 1, tiene como dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$ ( )

II. La función y = F(x) = cosx, es creciente en el intervalo $\langle 0; \pi \rangle$ ( )

III. La función y = F(x) = cosx + 47, es par. ( )

A) VVF B) VFV C) FFV
D) FFF E) FVF

10 Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda en:

I. La función y = F(x) = cotx, tiene como dominio: $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$ ( )

II. La función y = F(x) = secx, es decreciente en el intervalo $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$ ( )

III. La función y = F(x) = cscx – 5x, es impar. ( )

A) VFF B) FVF C) VVF
D) VFV E) FVV

11 Halla el período de:
$f(x) = 2(\operatorname{sen}3x - 2\operatorname{sen}x)(\cos 3x + 2\cos x)$

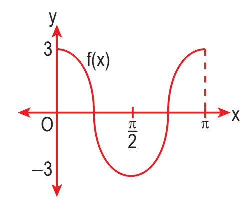
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$
D) π E) $\frac{\pi}{6}$

12 Halla el período de:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

A) π B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) 2π

13 En la figura, la función es de la forma: f(x) = AcosBx
Calcula A y B, respectivamente.



A) 5 y 2 B) 5 y 3 C) 6 y 3
D) 3 y 2 E) 4 y 2

14 Del gráfico, calcula:
M = 5a + 4b; siendo $P\left(\frac{\pi}{3};\ 0{,}8\right)$ un punto de dicha gráfica.
(Considera: a > 0)

y = asenbx

A) 10 B) 5 C) 9
D) 8 E) 6

Claves

1. B	3. B	5. C	7. E	9. C	11. B	13. D
2. D	4. D	6. B	8. C	10. E	12. C	14. A



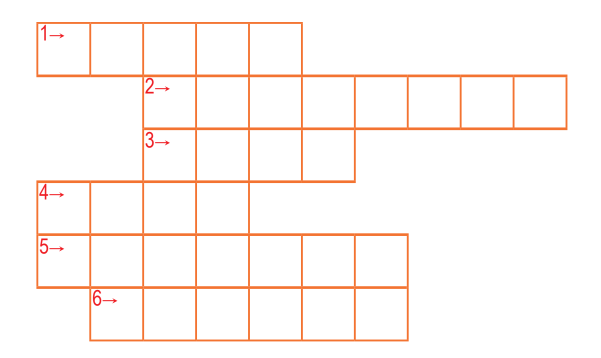
Practiquemos

NIVEL 1

Comunicación matemática

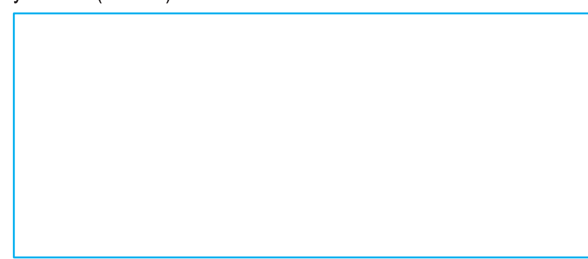
1. Completa el siguiente crucigrama y halla el nombre de un matemático en la columna:

1. Conjunto que tiene como elementos a los valores de la variable y.
2. Cateto opuesto entre cateto adyacente.
3. Primera letra del alfabeto griego.
4. Cateto opuesto entre hipotenusa.
5. Conjunto que tiene como elementos a los valores de la variable x.
6. Cateto adyacente entre hipotenusa.



2. Grafica un ciclo de la función:

$y = 3\text{sen}(4x - \pi) + 2$



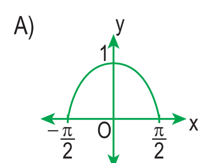
Razonamiento y demostración

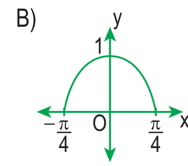
3. Si $F(x) = 2\text{sen}x + 3$;

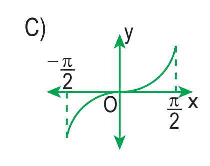
halla: $\text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F)$

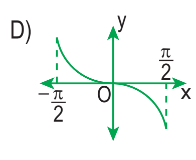
A) $[0; 5]$ B) $[1; 5]$ C) $\langle 1; 5\rangle$
D) $\langle 0; 5\rangle$ E) $\langle 2; 5]$

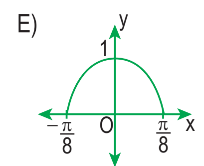
4. Grafica: $G(x) = \cos^4\frac{x}{2} - \text{sen}^4\frac{x}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

5. Halla el rango de la función f definida por:

$f(x) = \frac{3}{2 + \cos x}$

A) $[1; 3]$ B) $\langle 1; 3]$ C) $\langle 2; 3\rangle$
D) $[2; 3]$ E) $[3; 4]$

6. Si: $f(x) = \text{sen}x$; $g(x) = \cos x$

Además: $f(x) = g(x)$
Halla los valores de x, si: $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$

A) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$
D) $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$

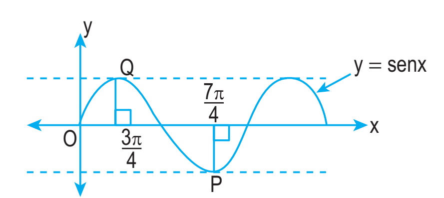
7. Dada la función:

$$f(x) = \cos^2x - 2\cos x$$

Halla el rango de la función.

A) $\langle -1; 3\rangle$ B) $[-1; 3\rangle$ C) $\langle 2; 3\rangle$
D) $[2; 3\rangle$ E) $[-1; 3]$

8. Halla la suma de las ordenadas de los puntos P y Q.



A) $-2\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 0
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

Resolución de problemas

9. De las funciones que se indican; ¿cuál no es par?

A) $F(x) = |\text{sen}x|$
B) $G(x) = \cos|x|$
C) $H(x) = \text{sen}|x|$
D) $G(x) = \cos x - \text{sen}x$
E) $F(x) = |\cos x| - |\text{sen}x|$

10. El punto $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2n-1}{2n+1}\right)$ pertenece a la gráfica de la función $y = \cos x$. Calcula n.

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/2
D) 3/4 E) 4/3

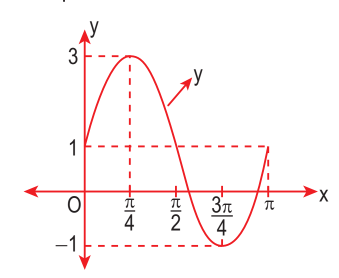
NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\tan(2x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ ( )
II. $\sec(x/2) \Rightarrow T = 4\pi$ ( )
III. $\cot(6x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{6}$ ( )

12. Completa:



y =

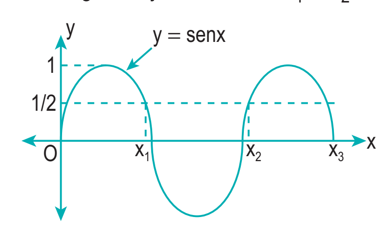
Período:

Amplitud:

Rango:

Razonamiento y demostración

13. En la figura adjunta, calcula: $x_1 + x_2 + x_3$



A) 6π
B) 4π
C) $5{,}5\pi$
D) $8{,}5\pi$
E) 7π

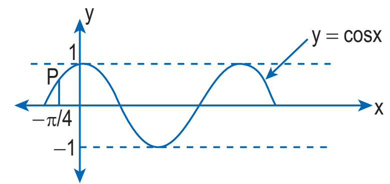
14. Si los puntos: $\left(\frac{\pi}{4}; y_1\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}; y_2\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3}; y_3\right)$

pertenecen a la tangentoide en x;

calcula: $\frac{y_3 - y_1}{y_3 + y_2}$

A) 1 B) 2 C) –1
D) 4 E) –2

15. Calcula las coordenadas del punto P.



A) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ C) $\left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D) $\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$ E) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

16. Halla el dominio de la función:
$f(x) = \cos x + \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$, $(k \in \mathbb{Z})$

A) $2k\pi$ B) $(2k + 1)\pi$ C) $(4k - 1)\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{k\pi}{2}$ E) $(4k + 1)\frac{\pi}{2}$

17. Halla el dominio de la función.

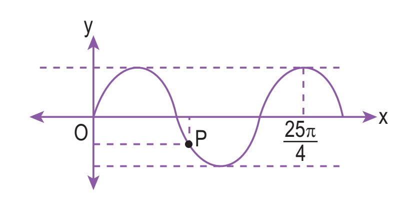
$F = \left\{(x; y)/y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}; 0 < x < 2\pi\right\}$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$ B) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right\rangle$

C) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\rangle$ D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right\rangle$

E) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$

18. La ecuación de la gráfica adjunta es: y = asenbx; además las coordenadas de P son $\left(\frac{10\pi}{3}; -\sqrt{6}\right)$
Halla a y b, respectivamente.



A) $2\sqrt{3}; \frac{3}{7}$ B) $2\sqrt{2}; \frac{2}{5}$ C) $\sqrt{7}; \frac{1}{2}$

D) $\sqrt{5}; \frac{3}{5}$ E) $3\sqrt{2}; \frac{5}{2}$

Resolución de problemas

19. ¿En cuál de los siguientes intervalos la función y = senx es decreciente?

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{5\pi}{11}; \frac{23\pi}{16}\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

D) $\langle -\pi; 0\rangle$ E) $\left\langle \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right\rangle$

20. El punto $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{2n-1}{2n+1}\right)$ pertenece a la gráfica de la función y = senx. Calcula n.

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/2
D) 3/4 E) 4/3

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. La amplitud de y = 5 + 3cosx, es 5. ( )

II. El período de y = 2senx(cosx) es π. ( )

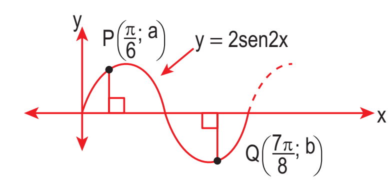
III. La gráfica de la función y = 2 + senx, se obtiene trasladando verticalmente 2 unidades hacia arriba la gráfica de y = senx. ( )

22. Relaciona según, corresponda:

$y = \lvert\operatorname{sen} 2x\rvert$ •	• $T = \frac{\pi}{3}$
$y = 2\operatorname{sen}x\cos x$ •	• $T = \frac{\pi}{2}$
$y = 1 - 2\operatorname{sen}^2 3x$ •	• $T = \pi$

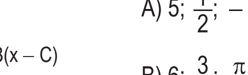
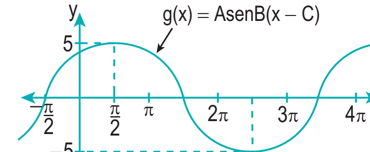
Razonamiento y demostración

23. Del gráfico mostrado, calcula: a – b



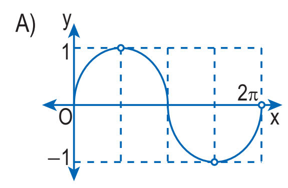
A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) 0
D) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ E) $-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

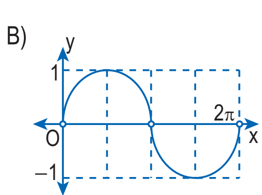
24. Si g(x) = AsenB(x – C),
halla A, B y C, respectivamente.

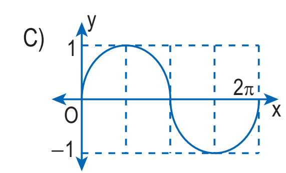



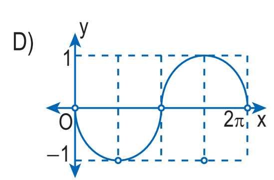
A) $5; \frac{1}{2}; -\frac{\pi}{2}$
B) $6; \frac{3}{4}; \frac{\pi}{3}$
C) $\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}$
D) $5; \frac{5}{2}; -\frac{\pi}{3}$
E) $5; -\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}$

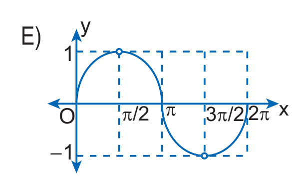
25. Grafica en $[0; 2\pi]$, la función: $F(x)=\dfrac{\text{sen}2x}{2\cos x}$

A)


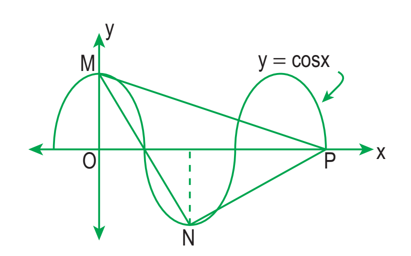
B)


C)


D)


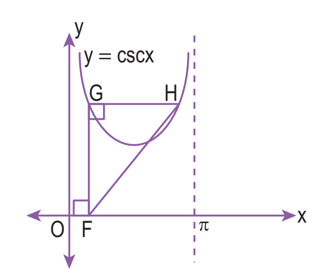
E)


26. De la figura, calcula el área de la región triangular MNP.



A) $\pi/2$ u^2
B) π u^2
C) 2π u^2
D) $\pi/4$ u^2
E) $2,5\pi$ u^2

27. En la figura adjunta, la ordenada del baricentro del triángulo FGH es $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Calcula su abscisa.



A) $\frac{5\pi}{12}$
B) $\frac{5\pi}{6}$
C) $\frac{5\pi}{3}$
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) $\frac{8\pi}{3}$

28. Si el punto (m; n) se obtiene de la intersección de las funciones y = tanx ∧ y = cotx en $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$, calcula:

$E = \sec\frac{m}{3} - n\csc\frac{m}{5}$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}$ C) 0
D) 2 E) $\sqrt{3}$

Resolución de problemas

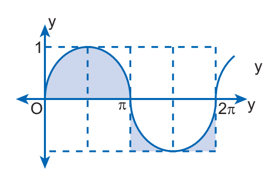
29. Calcula el área de la región limitada por las rectas y + 1 = 0, x = 0, x = 2π y la curva cuya ecuación es y = cosx, si $x \in [0; 2\pi]$.

A) 2π u^2 B) π u^2 C) 3π u^2
D) 4π u^2 E) $1,5\pi$ u^2

30. Si $(x_0; y_0)$ es el punto de intersección de las gráficas de las funciones F(x) = senx ∧ G(x) = cotx en $\langle 0; \pi\rangle$, calcula:
$\sec x_0 - \cos x_0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

31. En la figura, calcula el área de la región;
Si: $f(x) = \text{sen}x - [1 - \text{sen}^2x\cos^2x]$



A) $\frac{\pi}{2}$ u^2 B) 2π u^2 C) π u^2 D) $\frac{3\pi}{2}$ u^2 E) $\frac{5\pi}{2}$ u^2

Claves

NIVEL 1	7. E	13. A	20. B	26. C
1.	8. C	14. A	NIVEL 3	27. A
2.	9. D	15. A	21.	28. A
3. B	10. B	16. E	22.	29. A
4. A	NIVEL 2	17. D	23. A	30. A
5. A	11.	18. B	24. A	31. C
6. B	12.	19. E	25. E	

MARATÓN Matemática

- Si: $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{\text{sen}3x + \text{sen}x} = \dfrac{1}{2}$

Calcula:

$$M = \frac{1 + \cos 4x}{\text{sen}4x}$$

Resolución:

De la condición tenemos:

$$\frac{\cos 3x + \cos x}{\text{sen}3x + \text{sen}x} = \frac{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos 2x \cos x}{2\text{sen}2x \cos x} = \cot 2x = \frac{1}{2}$$

En la expresión:

$$M = \frac{1 + \cos 4x}{\text{sen}4x} = \frac{2\cos^2 2x}{2\text{sen}2x \cos 2x}$$

$$M = \frac{\cos 2x}{\text{sen}2x} = \cot 2x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ M = \frac{1}{2}$$

1. Si $\sec\alpha = 4$, calcula:

$k = 2\text{sen}\dfrac{3\alpha}{2} \times \text{sen}\dfrac{\alpha}{2}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{9}{8}$ C) $-\frac{5}{4}$

D) 2 E) $-\frac{3}{2}$

2. Si $\tan x = 3$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$D = 13\text{sen}3x - 9\cos 3x$

A) –1 B) 3 C) 1 D) 0 E) –2

3. Simplifica la siguiente expresión:

$M = \dfrac{\text{sen}6x}{4\text{sen}^3x - 3\text{sen}x}$

A) $-2\cos 3x$ B) $2\text{sen}3x$ C) $\frac{1}{2}\text{sen}3x$

D) $-\frac{1}{2}\text{sen}3x$ E) $2\text{sen}x \cdot \cos 3x$

4. Calcula el dominio de la siguiente función:

$f(x) = \dfrac{\text{sen}2x + \cos x}{\sqrt{1 + \text{sen}x - \cos^2 x}}$; $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ C) $\langle 0; 2\pi\rangle - \frac{\pi}{2}$

D) $\langle 0; \pi\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

5. Calcula el dominio de la siguiente función.

$f(x) = \sqrt{-\cos^2 x - 2\text{sen}x + 1}$; $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$

A) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\right\rangle$

C) $\langle 0; \pi\rangle$ D) $[\pi; 2\pi\rangle$

E) $\langle 0; 2\pi\rangle - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

6. Halla el rango de la siguiente función:

$f(x) = 2\text{sen}^2(3x) + 1$

A) [1; 3] B) [0; 1] C) [0; 2]

D) [1; 2⟩ E) [0; 3⟩

7. Simplifica:

$A = \sqrt{3}\cos 20° - \cos 50°$

A) cos20° B) sen20° C) cos10°

D) sen50° E) tan25°

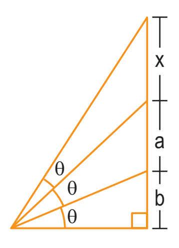
8. Simplifica:

$P = \sqrt{2}\cos 15° - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A) sen15° B) $\frac{1}{2}$ C) cos(152)°

D) tan 45°/2 E) cos20°

9. Del gráfico:



Halla el valor de x.

A) $\dfrac{a^2}{2b - a}$ B) $b^2 - a^2$ C) $\dfrac{1}{b + a}$

D) $\dfrac{1}{b^2 + a^2}$ E) $b^2 + a^2$



Unidad 4

Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría
Trigonometría

Aplicamos lo aprendido



TEMA 1: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1 Determina el dominio de:

$F(x) = 4\text{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

A) $[-\pi; \pi]$ B) $[-3; 1]$ C) $\langle -3; 1\rangle$
D) $\langle -\pi; \pi\rangle$ E) $\langle 1; \pi]$

2 Calcula:

$N = \text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arccos}\frac{5}{13}\right)$

A) $\frac{1}{65}$ B) $\frac{49}{65}$ C) $\frac{65}{63}$
D) $\frac{63}{65}$ E) $\frac{49}{63}$

3 Calcula:

$E = \text{sen}(\text{arctan}2)$

A) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

4 Halla:

$E = \cos(2\text{arctan}3)$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{4}{5}$

5 Calcula:

$\sec(2x - \text{arctan}\sqrt{3}) = \sqrt{2}$

A) 54°30' B) 52°30' C) 50°30'
D) 55°30' E) 51°30'

6 Calcula:

$E = \text{sen}(2\text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3})$

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{2}$

7 Indica el dominio de f, si se cumple:

$f(x) = 4\arccos\left(\frac{7x+1}{8}\right) - \frac{\pi}{5}$

A) $[-1; 1]$ B) $[-1; 7]$ C) $\left\langle -\frac{9}{7}; 1 \right\rangle$

D) $\left[-\frac{9}{7}; 1\right]$ E) $\left[-1; \frac{9}{7}\right]$

8 Halla x, si:

$\arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{18} = \arctan x$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) -1 E) 3

9 Calcula el valor de m, si:

$\arctan\left(\frac{m}{8}\right) = \arcsen\frac{8}{17}$

A) $\frac{15}{64}$ B) $\frac{25}{64}$ C) $-\frac{1}{64}$

D) $\frac{64}{15}$ E) $\frac{64}{25}$

10 Calcula x:

$\arcsen x = \arctan\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)$

A) $\frac{11\sqrt{26}}{130}$ B) $\frac{\sqrt{26}}{75}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{26}}{130}$ E) $-\frac{11}{130}$

11 Sabiendo que:

$\arctan\sqrt{3} = m\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Calcula: $\tan\left[m\left(\frac{\pi}{2} - \text{arcsec}\, m\right)\right]$

A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) -3

D) 0 E) $\frac{1}{3}$

12 Simplifica:

$E = \arcsen\{\cos[\arctan(\cot 30°)]\}$

A) 20° B) 40° C) 30°

D) 50° E) 80°

13 Halla el rango de g, siendo g definida por:

$g(x) = 8\arccos\left(\frac{3x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$

A) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ B) $\left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

C) $\left[-\frac{31\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ D) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{31\pi}{4}\right]$

E) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right]$

14 Halla el rango de f, siendo: $f(x) = \frac{\pi}{3} + 3\arcsen x$

A) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ B) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

C) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ D) $\left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\rangle$

E) $\left[\frac{-9\pi-2}{6}; \frac{9\pi+2}{6}\right]$

Claves

1. B	3. E	5. B	7. D	9. D	11. B	13. D
2. D	4. E	6. C	8. A	10. A	12. C	14. C



Practiquemos

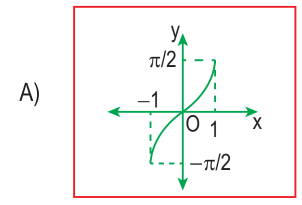
NIVEL 1

Comunicación matemática

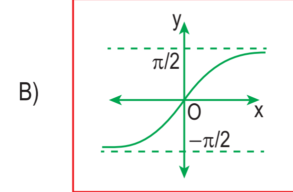
1. En el siguiente cuadro completa el dominio y el rango para cada función trigonométrica inversa dada:

Función	Dominio	Rango
y = arctanx		
y = arcsecx		
y = arccosx		
y = arccscx		
y = arcsenx		

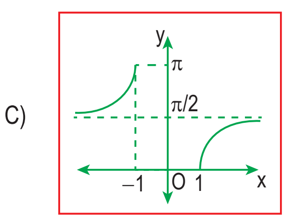
2. Relaciona mediante una línea gráfico-función:

A) 

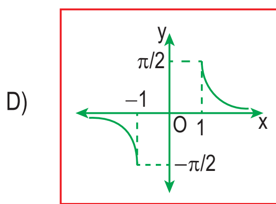
• arctanx

B) 

• arcsenx

C) 

• arccscx

D) 

• arcsecx

Razonamiento y demostración

3. Siendo: $\theta = \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{arccos}1$

Calcula: $\text{sen}\theta + \cos\theta$

A) $\sqrt{3} + 1$ B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C) 1
D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ E) $\sqrt{3}$

4. Calcula: $M = \text{arcsec}(2) + \text{arccsc}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

A) $\pi/6$ B) $\pi/2$ C) $\pi/3$
D) $\pi/4$ E) $2\pi/3$

5. Calcula el valor numérico de:

$M = \text{sen}\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{1}{7}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{3}$

6. Si se cumple: $\text{arcsen}a + \text{arccos}b = \frac{\pi}{3}$

Calcula: $K = \text{arccos}a + \text{arcsen}b$

A) $\pi/3$ B) $3\pi/2$ C) $\pi/6$
D) $\pi/2$ E) $2\pi/3$

7. Calcula el valor de:

$M = \arctan\frac{5}{6} + \arctan\frac{1}{11}$

A) $3\pi/4$ B) $\pi/4$ C) $5\pi/4$
D) $-\pi/4$ E) $7\pi/4$

8. Si se cumple:

$\theta = \text{arcsen}(x^2 + 1)$

Calcula: $\cos\theta$

A) 1/2 B) –1 C) 1
D) –1/2 E) 0

9. Halla el dominio de f, si:

$f(x) = \text{arcsen}x + \text{arcsen}2x$

A) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ C) $[-1; 1]$
D) $[-2; 2]$ E) $\langle -1; 1\rangle$

Resolución de problemas

10. Determina el dominio de la siguiente función:

$f(x) = 2\text{arcsen}(x + 2) - 4\text{arccos}(x^2 - 1)$

A) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ B) $[-1, \sqrt{2}\rangle$ C) $[-1; 1]$
D) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$ E) $\{\sqrt{2}\}$

11. Calcula el dominio de la siguiente función:

$f(x) = \dfrac{\text{arcsen}x}{\text{arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$

A) $\langle -1; 0\rangle$ B) $[-1; 1]$ C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $[0; 1]$ E) $[0; 1\rangle$

NIVEL 2

Comunicación matemática

12. Respecto a las propiedades de las funciones trigonométricas inversas indica las condiciones de estas.

- sen(arcsenx) = x ⇔ ____________
- tan(arctanx) = x ⇔ ____________
- sec(arcsecx) = x ⇔ ____________
- arccot(cotx) = x ⇔ ____________
- arccos(cosx) = x ⇔ ____________
- arccsc(cscx) = x ⇔ ____________

13. Indica (V) verdadero o (F) falso según corresponda:

- Si: $-1 \leq x \leq 1$
  $\Rightarrow$ arccos(–x) = –arccosx ( )
- Si: $x \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ arctan(–x) = –arctanx ( )
- Si: $x \leq -1 \vee x \geq 1$
  $\Rightarrow$ arcsec(–x) = π – arcsecx ( )
- Si: $x \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ arcsen(–x) = – arcsenx ( )
- S: $x \leq -1 \vee x \geq 1$
  $\Rightarrow$ arccsc(–x) = –arccscx ( )

Razonamiento y demostración

14. Si se cumple:

$a = b\,\text{arcsen}\frac{2cx}{d};\quad 0 < \frac{a}{b} < \frac{\pi}{2} \wedge \{c; d\} \in \mathbb{R}^+$

Halla la variación de x.

A) $\left\langle 0; \frac{d}{2c}\right\rangle$ B) $\langle -1; 1\rangle$ C) $\left[0; \frac{d}{2c}\right]$
D) [0; 1] E) $\left[-\frac{d}{2c}; 0\right\rangle$

15. Halla el equivalente de:

$P = \text{arccos}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{arctan}\left(\frac{3}{5}\right)$

A) $\text{arcsen}\frac{7}{10}$ B) $\text{arctan}\frac{27}{11}$ C) $\text{arctan}\frac{11}{27}$

D) $\text{arccos}\frac{27}{11}$ E) $\text{arctan}\frac{1}{10}$

16. Siendo: $\theta = \text{arctan}\left(\frac{m}{n}\right) - \text{arctan}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)$

Calcula: tanθ

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) –2

17. Calcula el valor numérico de:

$K = \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{arctan}(\sqrt{3})$

A) 4π/3 B) 7π/6 C) 5π/6
D) π/3 E) 8π/3

18. Resuelve la siguiente ecuación:

$\text{arctan}x + \text{arctan}(1 - x) = \text{arctan}\frac{4}{3}$

A) 1/5 B) 1/3 C) 1/2
D) 2 E) 1/7

19. Calcula el valor numérico de:

$Q = \text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arcsen}\frac{8}{17} - \text{arcsen}\frac{77}{85}$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

20. Halla el rango de: $g(x) = 4\text{arctan}x - \frac{\pi}{2}$

A) $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ C) $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

D) $\left\langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

21. Siendo: x > 0

Calcula el valor de x si: $\text{arccos}(\sqrt{3}\,x) + \text{arccos}\,x = \frac{\pi}{2}$

A) 1 B) 1/2 C) –1/2
D) –1 E) $\sqrt{3}/2$

22. Calcula:

$M = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \text{arccos}\,1 + \text{arctan}\sqrt{3}$

A) π/3 B) π/5 C) 2π/3
D) π E) π/2

Resolución de problemas

23. Calcula el dominio de la siguiente función:

$K(x) = \text{arcsen}(\text{sen}x - \frac{1}{2});\ x \in \langle 0; 2\pi\rangle$

A) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ B) $\left\langle 0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right\rangle$

C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right\rangle$ D) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right\rangle$

E) $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

24. Calcula la suma del máximo y mínimo valor de:

$f(x) = \text{arcsen}(\text{sen}^2x - 1)$

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) 0
D) $-\frac{\pi}{2}$ E) – π

NIVEL 3

Comunicación matemática

25. De las siguientes proposiciones:

- $\text{arcsenx} + \text{arccosx} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$
- $\text{arctanx} + \text{arccotx} = \pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $\text{arcsecx} + \text{arccscx} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \leq -1 \lor x \geq 1$
- $\text{arctanx} + \text{arctany} = \text{arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \Leftrightarrow xy < 1$

¿Cuántas son verdaderas?

A) 4 B) 3 C) 2
D) 0 E) 1

26. Relaciona las siguientes expresiones:
M: es el valor de x si: $\text{arcsen}(-x) + 2\text{arcsenx} = \frac{\pi}{6}$

N: es el valor de x si: $\text{arccos}(-x) + 2\text{arccosx} = \frac{7\pi}{6}$

A) $\frac{M}{N} = \text{sen}60°$ B) $\frac{M}{N} = \tan 30°$ C) $\frac{M}{N} = \text{sen}30°$

D) $\frac{M}{N} = \cot 30°$ E) $\frac{M}{N} = 1$

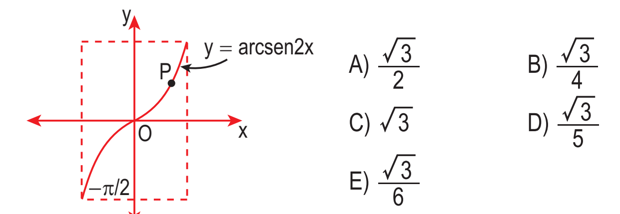
Razonamiento y demostración

27. Halla β de la siguiente relación:
$p = q\arctan\left(\frac{m\beta}{n}\right)$

A) $\frac{m}{n}\tan\left(\frac{p}{q}\right)$ B) $\frac{n}{m}\tan\left(\frac{p}{q}\right)$ C) $\tan\left(\frac{pq}{mn}\right)$

D) $mn\tan(pq)$ E) $mn\tan\left(\frac{p}{q}\right)$

28. De la figura calcula x_1, siendo $P\left(x_1; \frac{\pi}{3}\right)$

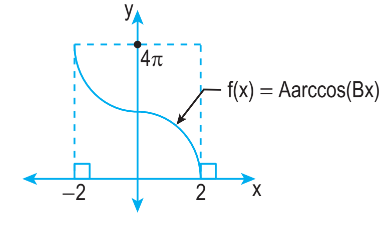


A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

29. Del gráfico adjunto, calcula A.B.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 8

30. Halla la intersección entre el dominio y rango de la función:

$f(x) = 2\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$

A) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ B) $[-1; 1]$ C) $\langle -1; 1\rangle$

D) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$ E) $[0; 2]$

31. Si se cumple: $\text{arcsen}1 + \text{arccosx} = \text{arccos}0$
Calcula: x

A) 1 B) 0 C) –1 D) 1/2 E) –1/2

32. Calcula el valor de:

$L = 2\text{arcsen}(-1) + \frac{1}{2}\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A) $\frac{7\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{5\pi}{12}$

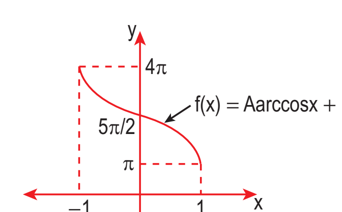
D) $-\frac{7\pi}{12}$ E) $-\frac{\pi}{12}$

33. Calcula:
$\theta = \arctan(\tan 100°) - \text{arccot}(\cot 300°)$

A) 270° B) –180° C) 90°
D) 180° E) –200°

Resolución de problemas

34. Del siguiente gráfico calcula: Q = A + cosB



A) –1
B) 1
C) 2
D) 0
E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

35. Calcula el dominio de la siguiente función:

$f(x) = \sqrt{\pi - 3\text{arcsenx}} + \sqrt{\text{arccos}(-x) - \text{arccos}\,x}$

A) $[-1; 0]$ B) $[0; 1]$ C) $[-1; 1]$

D) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$ E) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right]$

Claves

NIVEL 1	8. E	15. B	23. B	30. E
1.	9. B	16. C	24. D	31. A
2.	10. A	17. B	NIVEL 3	32. D
3. D	11. E	18. C	25. B	33. E
4. E	NIVEL 2	19. B	26. B	34. C
5. B	12.	20. E	27. B	35. A
6. E	13.	21. B	28. B	
7. B	14. A	22. C	29. B	

Aplicamos lo aprendido





TEMA 2: ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Resuelve: $2\text{sen}2x - 1 = 0$; e indica la solución principal.

A) 10° B) 30° C) 15°
D) 40° E) 50°

2 Resuelve: $\tan x = \sqrt{3}$
si $x \in \langle 0°; 180° \rangle$

A) 45° B) 30° C) 60°
D) 120° E) 150°

3 Si $90° \leq \theta \leq 180°$, calcula θ en:
$\text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta = \cos^2\theta$

A) 30° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 150°

4 Resuelve: $\text{sen}x + \cos x = 0$ y da como respuesta la menor solución positiva.

A) 135° B) 345° C) 225°
D) 75° E) 30°

5 Calcula la menor solución positiva de la ecuación:
$\text{sen}^2x - 2\text{sen}x - 3 = 0$

A) 0° B) 45° C) 90°
D) 270° E) 360°

6 Halla la segunda menor solución positiva de:
$(\cos 2\theta + \frac{1}{2})(\text{sen}\theta - 1) = 0$

A) 150° B) 120° C) 60°
D) 30° E) 90°

7 Determina la suma de las dos primeras soluciones positivas de:

$\tan\left(5x - \frac{\pi}{12}\right) = 2 + \frac{3}{\sqrt{3}}$

A) $3\pi/2$ B) $2\pi/5$ C) π
D) $7\pi/2$ E) 2π

8 Dada la ecuación: $2\tan 2x \,.\, \mathrm{sen}x = 0$
Indica su conjunto solución.

A) $\{\frac{2k\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{\frac{k\pi}{2} \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$
C) $\{\frac{k\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$ D) $\{\frac{7k\pi}{2} / \; k \in \mathbb{Z}\}$
E) $\{\frac{k\pi}{5} \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$

9 Resuelve: $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

A) $\left\{2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\} \cup \{2k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$ B) $\left\{2k\pi + \frac{2\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$
C) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ D) $\left\{\frac{k\pi}{2} - \pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$
E) $\left\{k\frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

10 Si $0 < x < 2\pi$ halla el valor de x en la ecuación:

$\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} - \frac{\mathrm{sen}x}{1 - \cos 2x} = 0$

A) $\frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6} \vee \frac{7\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3} \vee \frac{4\pi}{3}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

11 Resuelve: $\mathrm{sen}x - \cos x + \sec x = \csc x$
si $x \in [0; 2\pi]$

A) $\left\{\pi, \frac{9\pi}{4}\right\}$ B) $\left\{\pi, \frac{7\pi}{4}\right\}$ C) $\left\{\pi, \frac{3\pi}{4}\right\}$
D) $\left\{\pi, \frac{11\pi}{4}\right\}$ E) $\left\{\pi, \frac{5\pi}{4}\right\}$

12 Si se sabe que:

$\tan x \,.\, \tan z = 3$ ...(I)
$\tan y \,.\, \tan z = 6$ ...(II)
$x + y + z = \pi$ ...(III)

Evalúa: $\tan\frac{x}{3}$, si $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

A) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ B) $2 + \sqrt{3}$ C) $2 - \sqrt{3}$
D) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}/2$

13 Resuelve: $\tan\frac{\beta}{2} = \csc\beta - \mathrm{sen}\beta$

A) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right); k \in \mathbb{Z}$
B) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); k \in \mathbb{Z}$
C) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right); k \in \mathbb{Z}$
D) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right); k \in \mathbb{Z}$
E) $2k\pi \pm \arccos(\sqrt{5}); k \in \mathbb{Z}$

14 Calcula la suma de soluciones de la ecuación:

$\cos 6x = \left(\frac{1 + \mathrm{sen}6x}{\sec 2x}\right)\csc 2x$; si $x \in [0; \pi]$

A) $3\pi/2$ B) $3\pi/4$ C) $4\pi/3$
D) $2\pi/3$ E) $5\pi/6$

Claves

1. C	3. E	5. D	7. B	9. A	11. E	13. B
2. C	4. A	6. E	8. B	10. A	12. C	14. A

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Relaciona según corresponda:

FT	VP
sen	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
cos	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$
tan	$[0; \pi]$



2. Si, $E_G = k\pi + (-1)^k\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

Completa:

$k = -1$; $E_G =$

$k = -2$; $E_G =$

$k = -3$; $E_G =$

Razonamiento y demostración

3. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A) 90° B) 180° C) 270° D) 300° E) 360°

4. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 90° B) 180° C) 240° D) 270° E) 540°

5. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos x = \frac{1}{5}$

A) 180° B) 210° C) 220° D) 240° E) 360°

6. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 180° B) 210° C) 270° D) 360° E) 450°

7. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\tan x = 1$

A) 180° B) 225° C) 270° D) 360° E) 450°

8. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\tan x = -\sqrt{3}$

A) 160° B) 180° C) 240° D) 360° E) 420°

9. Determina la solución principal al resolver:

$\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} = 1$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{16}$ D) $\frac{\pi}{9}$ E) $\frac{\pi}{32}$

10. Resuelve: $(\tan 2x - 1)(\text{sen}x - 1) = 0$

Indica la suma de soluciones en el intervalo de $\langle 0; \pi \rangle$.

A) $\frac{17\pi}{8}$ B) $\frac{19\pi}{4}$ C) $\frac{21\pi}{8}$ D) $\frac{23\pi}{8}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Si senkx = a

Completa:

VP =

$x_G =$

x =

12. Relaciona según corresponda:

$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$VP = -\frac{\pi}{3}$
$\cos\left(\frac{x}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$VP = -\frac{\pi}{4}$
$\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$	$VP = \frac{\pi}{6}$

Razonamiento y demostración

13. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}2x\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 90°

14. Halla x si se cumple:

$\frac{\text{sen}7x - \text{sen}x}{\cos 4x} = \frac{1}{2}$

A) $\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)$ B) $\frac{1}{3}\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)$ C) $2\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)$

D) $3\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)$ E) $\frac{1}{2}\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)$

15. Si 30° y 45° son valores que toman **x** e **y** respectivamente del sistema dado, halla a + b.

$2\text{sen}x + \cos^2 y = a$ ...(1)

$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{2}\cos y = b$ ...(2)

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16. Resuelve:

$\text{sen}x = \sqrt{2} - \cos x;\ x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{5}$
D) $\frac{\pi}{9}$ E) $\frac{\pi}{6}$

17. Resuelve la ecuación:

$\text{sen}(x + 40°) + \text{sen}(50° - x) = 0,\ x \in \langle 0°; 180° \rangle$

A) 105° B) 75° C) 85° D) 115° E) 95°

18. Indica el número de soluciones que tiene la ecuación:

$\text{sen}^4x + \cos^4x = \frac{3}{4},\ x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

A) 2 B) 8 C) 7 D) 4 E) 6

19. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos 5x \cos x - \text{sen}5x\,\text{sen}x = \frac{1}{2}$

A) 10° B) 12° C) 24° D) 30° E) 60°

20. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos x \tan x + 2\text{sen}x = 1{,}5$

A) 90° B) 150° C) 180° D) 270° E) 360°

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. Para el senx: $CS(x) = k\pi + (-1)^k\ VP$ ( )

II. Para el cosx: $CS(x) = 2k\pi \pm VP$ ( )

III. Para la tanx: $CS(x) = k\pi + VP$ ( )

22. Relaciona según corresponda, si a es agudo:

$\text{sen}(2x + 15°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	VP = 120°
$\cos(x + 20°) = -\frac{1}{2}$	VP = –37°
$\tan(3x - 53°) = -\frac{3}{4}$	VP = 45°

Razonamiento y demostración

23. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}7x - \text{sen}x = \cos 4x$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{13\pi}{72}$
D) $\frac{7\pi}{8}$ E) $\frac{5\pi}{8}$

24. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\cos 5x + \cos x = \cos 2x$

A) 45° B) 55° C) 60° D) 65° E) 75°

25. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}^2(x - 45°) - \text{sen}^2(x - 15°) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

A) 180° B) 240° C) 300° D) 310° E) 330°

26. De la siguiente ecuación, calcula la suma de las soluciones en $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

$16(1 - \text{sen}^2\theta)(1 - \cos^2\theta) - 1 = 0$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{9\pi}{2}$ C) $\frac{11\pi}{12}$ D) $\frac{5\pi}{12}$ E) $\frac{7\pi}{2}$

27. Resuelve e indica la suma de soluciones, si:

$\tan 4x - \tan 2x = 0;\ x \in \langle 0; \pi \rangle$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{8}$

28. Suma las dos primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\frac{\cos 2x + \text{sen}^2x}{\cos 2x - \cos^2x} = -3$

A) 60° B) 150° C) 180° D) 210° E) 240°

29. Resuelve e indica la suma de las dos primeras soluciones positivas de **x** e **y** en el siguiente sistema de ecuaciones:

$\text{sen}x + \cos y = \frac{1}{2}$ ...(1)

$\text{sen}x - \cos y = -\frac{1}{2}$ ...(2)

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{3}$

30. Resuelve e indica la suma de valores de y en $\langle 0; 2\ \rangle$ del sistema dado.

$x + 2y = \frac{\pi}{2}$ ...(1)

$\text{sen}(x + y) + \cos y = \frac{1}{3}$ ...(2)

A) π B) 2π C) 3π D) 0 E) $\frac{3\pi}{2}$

Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. B
4. E
5. E
6. D
7. C
8. E
9. A
10. E

NIVEL 2
11.
12.
13. B
14. B
15. C
16. A
17. E
18. B
19. E
20. C

NIVEL 3
21.
22.
23. C
24. D
25. E
26. A
27. A
28. C
29. C
30. B





TEMA 3: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1 En un triángulo ABC recto en A, halla: senBsenC, si:

$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{10}{a^2}$

A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

2 En un triángulo ABC se conoce: a = 8, b = 7 y c = 5. Se traza una ceviana AD tal que BD = 3. Calcula AD.

A) 3 B) 17 C) $\sqrt{19}$
D) 16 E) 4

3 Los lados de un triángulo son tres números impares consecutivos y su mayor ángulo mide 120°. Calcula cuánto mide el lado mayor.

A) 5 B) 7 C) 9
D) 11 E) 13

4 En un triángulo ABC se cumple: a.b.c = 32 cm^3 y (senA)(senB)(senC) = $\frac{1}{2}$. Calcula el circunradio de dicho triángulo.

A) 2 cm B) 3 cm C) 1 cm
D) $\sqrt{2}$ cm E) $\sqrt{3}$ cm

5 Si a, b y c son los lados de un triángulo rectángulo ABC, recto en A, expresa M en términos de los lados.

$M=\frac{\tan 2B}{\cos(B-C)}$

A) $\frac{a^2}{2bc}$ B) $\frac{a^2}{b^2+c^2}$ C) $\frac{a^2}{c^2-b^2}$
D) $\frac{a^2}{(b+c)^2}$ E) $\frac{a^2}{(b-c)^2}$

6 En un triángulo ABC se cumple: $a^2=b^2+c^2-\frac{2}{3}bc$
Calcula tanA.

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

7 Halla el área de una región triangular isósceles, cuya base es k y el ángulo desigual es α.

A) $\frac{k^2}{4}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ B) $\frac{k^2}{2}\tan\alpha$

C) $\frac{k^2}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ D) $\frac{k^2}{4}\cot\alpha$

E) $\frac{k^2}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

8 En la figura, ABCD es un paralelogramo. Calcula AC.

A) $\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}$ B) $\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\theta}$

C) $\sqrt{m^2-n^2-2mn\cos\theta}$ D) $\sqrt{m^2-n^2+2mn\cos\theta}$

E) $\sqrt{m^2-n^2+2mn\,\text{sen}\theta}$

9 En un triángulo ABC, reduce:

$N=\frac{a\cos B+b\cos A}{b\cos C+c\cos B}$

A) $\frac{b}{a}$ B) $\frac{b}{c}$ C) $\frac{c}{a}$

D) $\frac{c}{b}$ E) $\frac{c}{ab}$

10 En un triángulo ABC: A = 30°; B = 135° y a = 2. Calcula: c.

A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\sqrt{3}-1$

11 En un triángulo ABC sus lados son: a = 33 cm, b = 37 cm, c = 40 cm
Calcula la medida del ángulo B.

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

12 Calcula la m∠C en un triángulo ABC, si a = 3b, además:

$\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)=2$

A) 45° B) 90° C) 135°

D) 30° E) 120°

13 En un triángulo ABC, se cumple:

m∠A + m∠B = 74° y m∠A – m∠B = 53°

Calcula: $\frac{a+b}{a-b}$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{3}$

D) 3 E) 2

14 En un triángulo ABC se cumple: $(a+b+c)(b+c-a)=\frac{bc}{4}$
Calcula: cosA

A) $-\frac{5}{8}$ B) $-\frac{7}{8}$ C) $-\frac{3}{4}$

D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{1}{4}$

Claves

1. A	3. B	5. C	7. A	9. C	11. E	13. B
2. C	4. A	6. C	8. B	10. A	12. B	14. B

Practiquemos

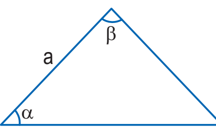


NIVEL 1

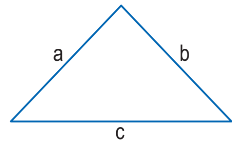
Comunicación matemática

1. Para cada caso indica qué teorema es aplicable.

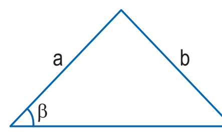
A) Un lado y los ángulos adyacentes.



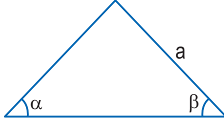
B) Los tres lados:



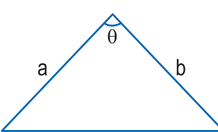
C) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.



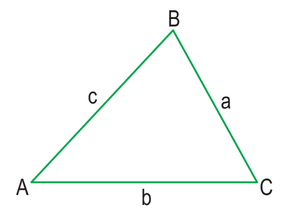
D) Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.



E) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.



2. Del siguiente triángulo:



Expresa en los siguientes cuadros el coseno de cada ángulo del triángulo en función de los tres lados.

CosA =

CosB =

CosC =

Razonamiento y demostración

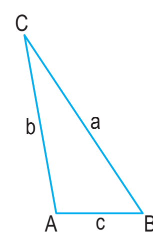
3. Los lados de un triángulo miden 3; 5 y 7. Calcula el coseno del mayor ángulo.

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{5}{6}$

4. En un triángulo ABC, reduce: $N = \frac{ab\cos C + ac\cos B}{R\,\mathrm{sen}A}$
R: circunradio

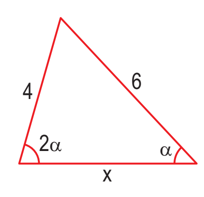
A) a B) b C) c
D) 2a E) 2b

5. Si: $m\angle B = 60°$; $m\angle C = 15°$ y $b = \sqrt{6}$, calcula a en el gráfico.



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5} + 2$ C) $\sqrt{6} + 1$
D) $\sqrt{3} + 1$ E) 2

6. Calcula x en la figura.

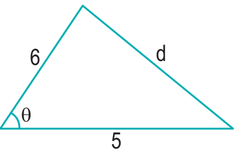


A) 7 B) 9 C) 6
D) 4 E) 5

7. En un triángulo ABC, simplifica: $N = \frac{b\cos B + c\cos C}{\cos(B - C)}$

A) a B) b C) c D) b + c E) b – c

8. Del gráfico mostrado, calcula d si se tiene que: $\tan\theta = \frac{\sqrt{161}}{8}$



A) $\sqrt{13}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{29}$
D) $\sqrt{39}$ E) $\sqrt{43}$

Resolución de problemas

9. En un $\triangle ABC$ se ubica el punto D en $\overline{AC}$ tal que AD = 4 y DC = 5. Además $m\angle ABD = m\angle ACB$. Halla el valor de AB.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 5

10. En un $\triangle MNP$, $MN = p$ y $NP = m$.

Además $\frac{m\angle M}{3} = m\angle P = \alpha$

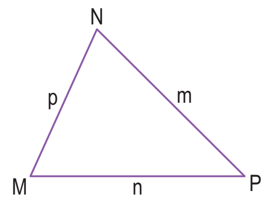
Halla el valor de $\cos 2\alpha$.

A) 0 B) $\frac{m+p}{2m}$ C) $\frac{m+p}{2p}$
D) $\frac{m-p}{2p}$ E) $\frac{p-m}{2m}$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Conocidos los tres lados de un triángulo.



Sabemos: $\cos N = \frac{p^2 + m^2 - n^2}{2mp}$

Indica qué tipo de ángulo es N, si:

A) $p^2 + m^2 > n^2$

____

B) $p^2 + m^2 = n^2$

____

C) $p^2 + m^2 < n^2$

____

12. De las siguientes proposiciones respecto a un $\triangle ABC$ de lados a; b y c.

- $a = b\cos B + c\cos C$
- $b = a\cos C + c\cos A$
- $c = a\cos B + b\cos A$
- $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+A}{2}\right)}$
- $S = \frac{ac}{2}\operatorname{sen}B$

S: área del $\triangle ABC$. ¿Cuántas son falsas?

A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 2

Razonamiento y demostración

13. En un triángulo ABC se cumple que: $a^2 + b^2 + c^2 = 10$. Calcula el valor de:

$E = abc\cos C + ac\cos B + bc\cos A$

A) 1 B) 5 C) 10
D) 8 E) 7

14. En un cubo de vértices ABCD-A'B'C'D', en la arista AA' se toma el punto N de modo que AN = 3NA'. Si $\theta = m\angle BNC'$, calcula: $\sqrt{33}\cos\theta$

A) 13/3 B) 13/4 C) 13/5
D) 4/5 E) 13/6

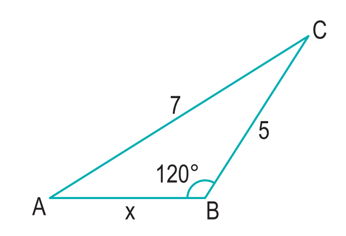
15. Uno de los lados de un triángulo es el doble del otro y el ángulo formado por ellos mide 60°. Calcula las medidas de los otros dos ángulos del triángulo.

A) 60° y 60° B) 45° y 75°
C) 30° y 90° D) 15° y 105°
E) 16° y 104°

16. Los lados de un triángulo miden 9; 10 y 17 cm. Calcula el valor de la tangente trigonométrica de la mitad del mayor ángulo.

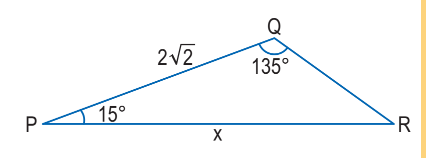
A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

17. Calcula x de la figura.



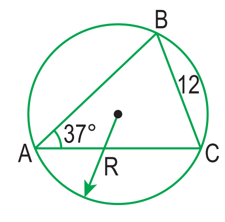
A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

18. Calcula x de la figura.



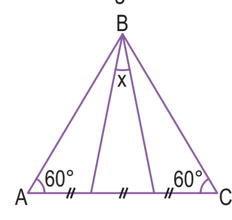
A) 8 B) 4 C) 2
D) 6 E) 10

19. Calcula el radio de la circunferencia.



A) 14 B) 12 C) 20
D) 10 E) 15

20. Calcula cosx de la figura.



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{13}$
D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{13}{14}$

Resolución de problemas

21. Expresa la bisectriz interior relativa al lado BC en función de los lados b, c y el ángulo A de un triángulo ABC.

A) $\frac{bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ B) $\frac{2bc}{b-c}\cos\frac{A}{2}$
C) $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ D) $\frac{bc}{b+c}\cos A$
E) $\frac{2bc}{b-c}\operatorname{sen}A$

22. En un triángulo ABC, se traza la ceviana BD (D en AC) tal que AD = 8 y DC = 3. Además $m\angle ABD = \beta$; AB = BC = k y BD = 5. Halla el valor de $k\cos^2\beta$.

A) 1/7 B) 1/5 C) 1
D) 3 E) 2/7

NIVEL 3

Comunicación matemática

23. Indica (V) verdadero o (F) falso según corresponda.

I. Para todo triángulo ABC, de lados a, b y c respectivamente, se cumple:

$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Donde: $p = \frac{a+b+c}{2}$ ( )

II. Para todo triángulo ABC, de lados a, b y c respectivamente, se cumple.

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{bc}}$

Donde: $p = \frac{a+b+c}{2}$ ( )

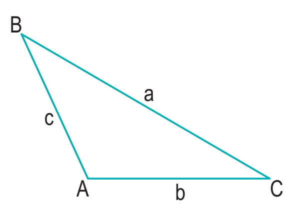
III. Para todo triángulo ABC de lados a, b y c respectivamente, se cumple:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Donde: S = área $\triangle ABC$

$p = \frac{a+b+c}{2}$ ( )

24. Del gráfico:



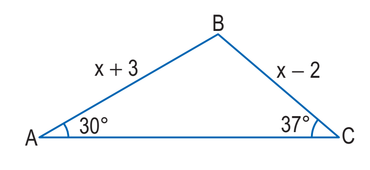
Para calcular el valor de:
15cosA + 20cosB + 24cosC
es (son) necesario(s).

I. $a = 13$; $b + c = 15$ y $b - c = 1$
II. $a + b + c = 28$ y $c = 7$

A) Es necesario I y II en conjunto.
B) Es necesario I, pero no II.
C) Es necesario II, pero no I.
D) Es necesario I, II por separado.
E) Faltan más datos.

Razonamiento y demostración

25. En la figura, calcula la longitud de BC.

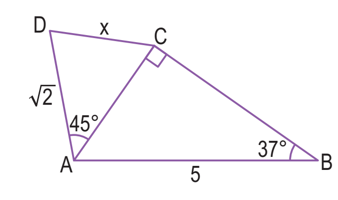


A) 29 B) 27 C) 25
D) 30 E) 26

26. Si $b = \sqrt{2}$; $c = \sqrt{3} + 1$; $m\angle A = 45°$, son valores de dos lados y un ángulo interior de un triángulo ABC, calcula la longitud del lado a.

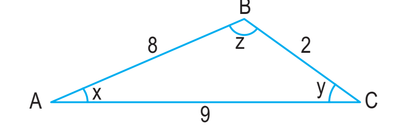
A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2} + 1$ C) 2
D) 3 E) $\frac{1}{3}$

27. En la figura, calcula x.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{5}$
D) 4 E) $\sqrt{2}$

28. Calcula: $\frac{\text{sen}^2 z}{\text{senxseny}}$



A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{16}{81}$ C) $\frac{16}{9}$
D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{81}{16}$

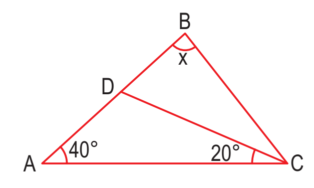
29. En un triángulo ABC se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{3}{2}bc$$

Calcula: senA

A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{7}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

30. Calcula x, si: $BC = \sqrt{3}\,AD$



A) 20° ∨ 50° B) 60° ∨ 120°
C) 70° ∨ 110° D) 50° ∨ 100°
E) 80° ∨ 120°

31. En un triángulo ABC, calcula:
bcsen(B + C)(cotB + cotC)

A) c^2 B) 2b C) b^2
D) a E) a^2

32. En un triángulo ABC, halla:

$$M = \left(\frac{a\cos A + b\cos B}{R\text{sen}C}\right)\sec(B - A)$$

R: circunradio del ΔABC

A) 2 B) 4 C) –1
D) –2 E) $\frac{1}{2}$

33. En un triángulo ABC, se tiene que: $a = 5b$ y $m\angle C = 120°$. Calcula: $\csc^2(A - B)$.

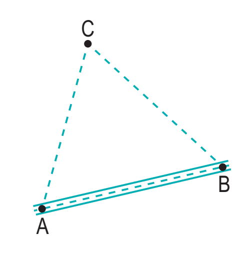
A) $\frac{961}{432}$ B) $\frac{900}{431}$ C) $\frac{529}{432}$
D) $\frac{197}{432}$ E) $\frac{970}{135}$

Resolución de problemas

34. El área de un triángulo MNO, es $90\sqrt{3}$ cm^2 y los senos de los ángulos M; N y O son proporcionales a los números 5; 6 y 7 respectivamente. Determina la longitud del lado opuesto a N.

A) $6\sqrt{60\sqrt{2}}$ B) $3\sqrt{60\sqrt{2}}$
C) $6\sqrt{30\sqrt{2}}$ D) $2\sqrt{30\sqrt{2}}$
E) $3\sqrt{30\sqrt{2}}$

35. En el siguiente esquema mostrado, $\overline{AB}$ representa un pequeño tramo de una carretera. Una persona se encuentra en el punto C, observa $\overline{AB}$ bajo un ángulo igual a γ. Halla la distancia mínima que debe recorrer la persona para llegar a la carretera, si se encuentra a una distancia m y n de los extremos A y B respectivamente.



A) $\frac{mn\text{sen}\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma}}$

B) $\frac{mn\cos\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\gamma}}$

C) $\frac{mn\tan\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma}}$

D) $\frac{mn\text{sen}\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2}}$

E) $\frac{m\cos\gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma}}$



Claves

NIVEL 1
1.
2.
3. B
4. D
5. D
6. E
7. A
8. C
9. B
10. D

NIVEL 2
11.
12. E
13. B
14. C
15. C
16. D
17. C
18. B
19. D
20. E
21. C
22. A

NIVEL 3
23.
24. B
25. C
26. C
27. C
28. E
29. A
30. C
31. E
32. A
33. A
34. E
35. A

Aplicamos lo aprendido



TEMA 4: SECCIONES CÓNICAS

1 Halla la ecuación ordinaria de una circunferencia, donde los puntos A(3; 2) y B(–1; 6) son extremos de uno de sus diámetros.

A) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$
B) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$
C) $(y-1)^2+(x-4)^2=4$
D) $(x-4)^2+(x-1)^2=4$
E) $(x-2)^2+(y-4)^2=8$

2 Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (6; 4) y pasa por el punto (3; 4).

A) $(x-4)^2+(y-6)^2=9$
B) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$
C) $(x-6)^2+(y-4)^2=9$
D) $(x-6)+(y-3)^2=16$
E) $(x-4)+(y-3)^2=25$

3 Halla la ecuación de la circunferencia de centro (3; 5) y tangente a la recta: $y-1=0$

A) $(x-3)^2+(y-5)^2=16$
B) $(x-5)^2+(y-3)^2=1$
C) $(x-1)^2+(y-5)^2=9$
D) $(x-5)^2+(y-1)^2=16$
E) $x^2+y^2=9$

4 De la figura, calcula TA, si:
$\mathscr{C}: x^2+y^2-8x-18y-24=0$

A) 11,3
B) 11,25
C) 12
D) 13
E) 11

5 Calcula la ecuación de la elipse, si sus vértices son los puntos (5; 0) y (–5; 0) y sus focos (4; 0) y (–4; 0)

A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$
B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
C) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
D) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$
E) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

6 El centro de una elipse es el punto (–4; –3) y las longitudes de sus ejes son 34 y 16. Halla el valor de sus vértices si el eje focal es paralelo al eje y.

A) (–4; 14); (–4; –20)
B) (–3; 14); (–3; –20)
C) (–4; 14); (–3; 20)
D) (–3; 11), (–4; 17)
E) (+34; –4); (–20, –3)

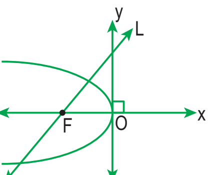
7 Si uno de los vértices de la elipse es (–1; 6) y un extremo de su eje menor es (3; –2), calcula la ecuación de la elipse.

A) $\dfrac{(x-1)^2}{14}+\dfrac{(y+2)^2}{8}=1$ B) $\dfrac{(x-2)}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$

C) $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{64}=1$ D) $\dfrac{(x-1)^2}{64}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

E) $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{64}=1$

8 En la figura, L: $5x - 3y + 15 = 0$ y F es el foco de la parábola. Halla la ecuación de la parábola.



A) $y^2 = 12x$ B) $y^2 = 10x$ C) $y^2 = -12x$
D) $y^2 = 3x$ E) $2y^2 = 5x$

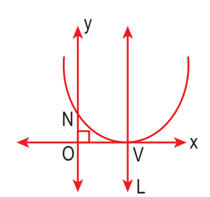
9 Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco tienen por coordenadas (–4; 3) y (–1; 3), respectivamente.

A) $(y-3)^2 = 12(x+4)$ B) $y^2 = 12x$
C) $(y-3)^2 = x-4$ D) $y^2 = 4(x-4)$
E) $(y-3)^2 = x+4$

10 Halla la distancia del centro de una circunferencia al origen de coordenadas, sabiendo que su ecuación es:
$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

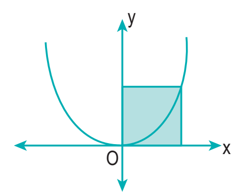
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 1

11 En la figura, V es vértice de la parábola, NO = 2 y VO = 4. Halla la ecuación de la parábola si $\overleftrightarrow{L}$ es el eje focal.



A) $(x-4)^2 = 8y$ B) $(x-8)^2 = 2y$
C) $x^2 = 16y$ D) $(x-2)^2 = 8y$
E) $(x-4)^2 = 6y$

12 En el gráfico, halla la ecuación de la parábola si el área de la región cuadrada es 16 m^2.

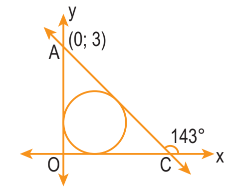


A) $x^2 = y$ B) $x^2 = 4y$
C) $(x-1)^2 = y$ D) $x^2 = (y-1)$
E) $(x-1)^2 = 2y$

13 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y su centro pertenece a las rectas:
L_1: $3x - 2y - 24 = 0$
L_2: $2x + 7y + 9 = 0$

A) $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 45$
B) $(x-3)^2 + y^2 = 40$
C) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 50$
D) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 64$
E) $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 72$

14 Halla la ecuación de la circunferencia, según el gráfico:



A) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$
B) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$
C) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
D) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
E) $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 16$

Claves

1. B	3. A	5. E	7. C	9. A	11. A	13. A
2. C	4. B	6. A	8. C	10. C	12. B	14. C

Practiquemos

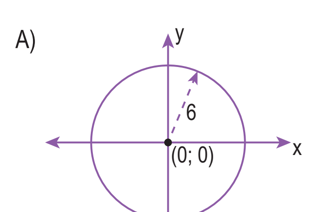


NIVEL 1

Comunicación matemática

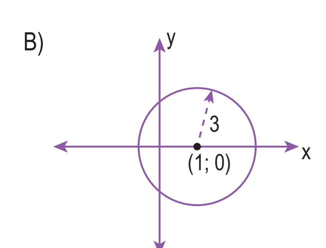
1. Tomando en cuenta los gráficos, completa las ecuaciones de las circunferencias mostradas en los recuadros en blanco:

A)



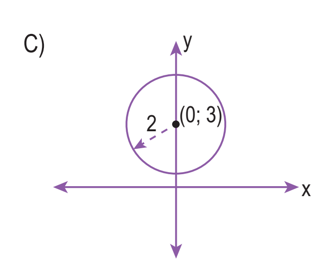


B)



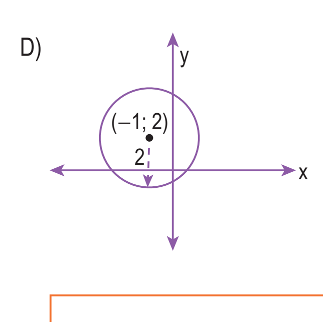


C)



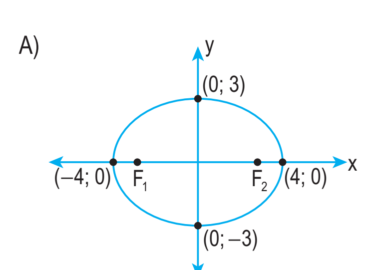


D)



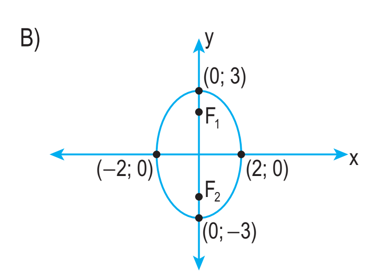
2. Tomando en cuenta los gráficos, completa las ecuaciones de las elipses mostradas en los recuadros en blanco:

A)



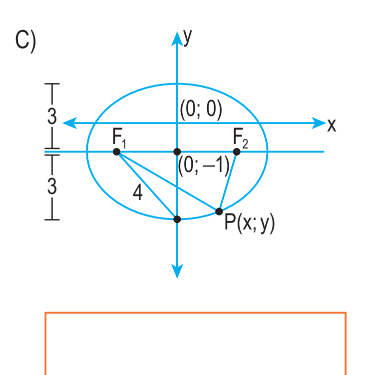


B)





C)



Razonamiento y demostración

3. La ecuación de una parábola es $x^2 + 28y = 0$. Halla las coordenadas del foco y la longitud de su lado recto.

A) (0; 28), 7 u B) (0; 7), –28 u C) (0; –7), 28 u
D) (0; 7), 28 u E) (–7; 0), 28 u

4. La ecuación de una circunferencia es:
$x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$. Halla el radio.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 12

5. La ecuación de una parábola es $(x + 6)^2 = -7(y + 1)$. Halla las coordenadas del vértice, foco y la longitud del lado recto.

A) $(-6; -1)$, $(-6; -11/4)$, -7 u

B) $(6; 1)$, $(6; -11/4)$, 7 u

C) $(-6; -1)$, $(-6; -11/4)$, 7 u

D) $(-6; 1)$, $(-6; -11/4)$, 7 u

E) $(6; 1)$, $(6; -11/4)$, 7 u

6. La ecuación de una parábola es $(x - 1)^2 = 2(y + 2)$. Halla los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas.

A) $(3; 0)$ y $(-1; 1)$ B) $(-3; 0)$ y $(-1; 0)$

C) $(3; 0)$ y $(1; -1)$ D) $(3; 0)$ y $(1; 0)$

E) $(3; 0)$ y $(-1; 0)$

7. Halla el centro de la circunferencia cuya ecuación es:
$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$

A) $(6; 2)$ B) $(2; 6)$ C) $(-2; -6)$
D) $(-2; 6)$ E) $(2; -6)$

8. Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son $V_1(7; -3)$ y $V_2(7; 9)$ y la longitud de su lado recto es 10 u.

A) $\dfrac{(x-7)^2}{30} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$

B) $\dfrac{(x+7)^2}{36} + \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$

C) $\dfrac{(x-8)^2}{27} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$

D) $\dfrac{(x+7)^2}{32} + \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$

E) $\dfrac{(x-9)^2}{16} + \dfrac{(y-5)^2}{12} = 1$

9. Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son $(0; -8)$ y $(0; 8)$ y sus focos $(0; -3)$ y $(0; 3)$.

A) $\dfrac{x^2}{26} - \dfrac{y^2}{62} = 1$ B) $\dfrac{x^2}{55} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ C) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{55} = 1$

D) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ E) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

Resolución de problemas

10. Halla la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal sobre el eje x. La curva pasa por el punto $(2; 3)$ y el eje mayor es el doble de la distancia entre los focos.

A) $4x^2 + 3y^2 = 12$ B) $3x^2 + 4y^2 = 48$

C) $4x^2 + 3y^2 = 48$ D) $x^2 + y^2 = 96$

E) $2x^2 + 3y^2 = 16$

11. Se tiene una circunferencia cuyo centro dista 5 u del origen de coordenadas. La circunferencia pasa por el punto $(-5; 4)$ y posee un radio de 2 u. Halla la ecuación de la circunferencia, siendo las coordenadas del centro números enteros.

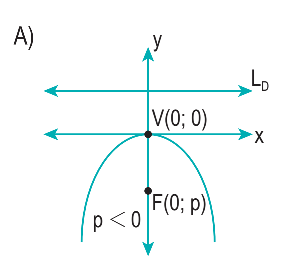
A) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ B) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$
C) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$ D) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$
E) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$

NIVEL 2

Comunicación matemática

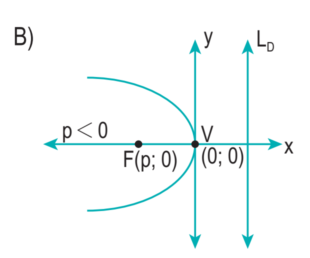
12. Tomando en cuenta los siguientes gráficos, completa las ecuaciones de las parábolas mostradas.

A)



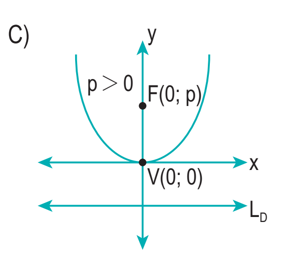


B)

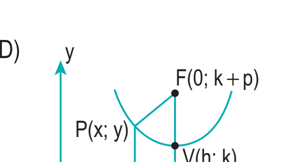


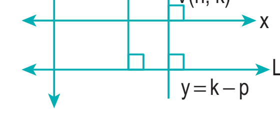


C)



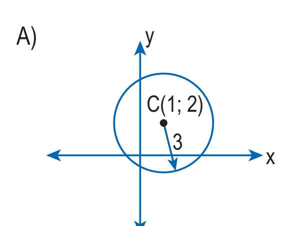
D)



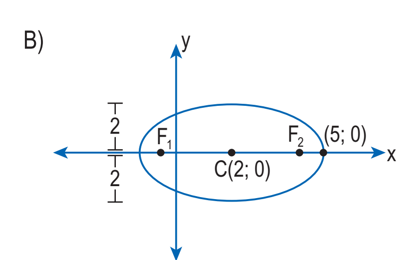


13. Tomando en cuenta los siguientes gráficos, completa las ecuaciones generales de las figuras mostradas.

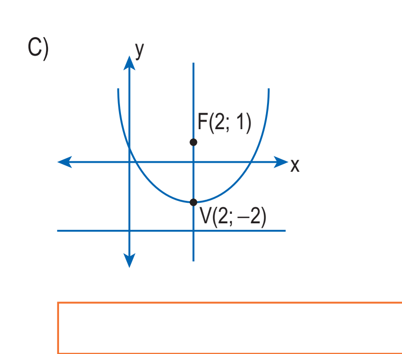
A)



B)



C)



Razonamiento y demostración

14. Halla la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 16y = 0$

A) $3y + 4 = 0$ B) $3y - 4 = 0$ C) $3y - 6 = 0$
D) $3y + 6 = 0$ E) $3y - 8 = 0$

15. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice es (0; 0) y cuyo foco es (0; 6).

A) $x^2 = 24y$ B) $x^2 = y$ C) $x^2 = y + 24$
D) $x^2 = 2y$ E) $x^2 = -24y$

16. Halla un punto de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 8y - 9 = 0$ con el eje coordenado y.

A) (0; 1) B) (0; 9) C) (−9; 0)
D) (0; 0) E) (9; −9)

17. Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos (2; −2), (−1; 4) y (4; 6).

A) $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$
B) $6x^2 + 6y^2 + 32x + 25y + 34 = 0$
C) $6x^2 + 6y^2 - 25x - 32y + 34 = 0$
D) $6x^2 - 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$
E) $6x^2 + 6y^2 - 25x - 32y - 34 = 0$

18. Halla la ecuación de una circunferencia de radio igual a 7 u, cuyo centro es el punto (5; −1).

A) $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 23 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 23 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 23 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 23 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 23 = 0$

19. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (−2; 3) y además se sabe que esta pasa por el punto (4; 5).

A) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 27 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 27 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 18 = 0$

20. La ecuación de una elipse es $5x^2 + 2y^2 - 10x - 12y + 13 = 0$. Determina las coordenadas de los focos.

A) $(1; 3 - \sqrt{3}); (1; 3 + \sqrt{3})$ B) $(1; 3 - \sqrt{2}); (1; 3 + \sqrt{2})$
C) $(2; 1 - \sqrt{3}); (2; 1 + \sqrt{3})$ D) $(3; 1 - \sqrt{2}); (3; 1 + \sqrt{2})$
E) $(1; 2 - \sqrt{2}); (1; 2 + \sqrt{2})$

21. Determina la ecuación de la elipse con centro en el punto (−2; −5), eje focal paralelo al eje y, la longitud del eje mayor es 24 u y su excentricidad es $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

A) $\frac{(x-2)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{144} = 1$ B) $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{144} = 1$

C) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$ D) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

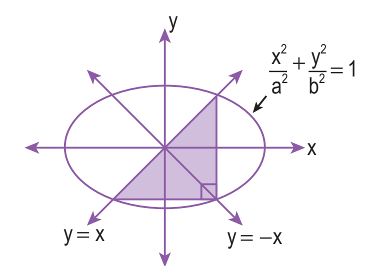
22. Halla la ecuación de la elipse cuyo centro es el origen de coordenadas, si el eje focal coincide con el eje x, y además pasa por los puntos $(\sqrt{6}; -1)$ y $(2; \sqrt{2})$.

A) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ B) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ C) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

D) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ E) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Resolución de problemas

23. Del gráfico mostrado, calcula el área de la región sombreada en términos de a y b, si las ecuaciones de las rectas son $y = x \wedge y = -x$



A) $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ B) $\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ C) $\frac{4a^2b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$

D) $\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}$ E) $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$

24. El vértice de una parábola es (3; 2) y su directriz es $y = 1$. Calcula la ecuación de la parábola.

A) $(x - 3)^2 = 4(y - 2)$ B) $(x - 3)^2 = 2(y - 2)$

C) $(x - 3)^2 = (y - 2)$ D) $(x - 2)^2 = 3(y - 2)$

E) $(x - 2)^2 = (y - 3)$

NIVEL 3

Comunicación matemática

25. Completa (V) verdadero o (F) falso, según corresponda, luego marca la alternativa correcta.

I. La ecuación general de una parábola de eje focal paralelo al eje x es:
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ( )

II. Las elipses son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a por lo menos una de sus generatrices. ( )

III. La ecuación general de la circunferencia es:
$x^2 + y^2 + Cx + Dy = Exy$ ( )

IV. La ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal en el eje **y** es:
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )

A) VFVF B) FVVF C) VFFV
D) VVFV E) FFVF

26. Compara las siguientes cantidades:

M: longitud del lado recto de la siguiente parábola:
$y^2 + 2x - 10y + 27 = 0$

N: radio de la siguiente circunferencia:
$y^2 + x^2 - 2y + 4x - 11 = 0$

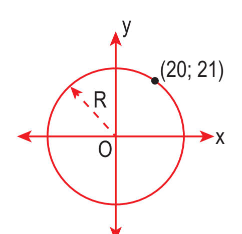
A) M = N B) M = 2N C) 3M = 2N
D) 2M = N E) M = 3N

Razonamiento y demostración

27. La ecuación de una parábola es $x^2 + 9y = 0$, y además los puntos A(3; a) y B(b; –4) pertenecen a la parábola. Halla la longitud del segmento AB (B ∈ IIIC).

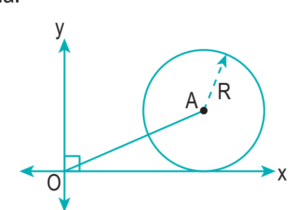
A) $2\sqrt{10}$ u B) $\sqrt{10}$ u C) $2\sqrt{5}$ u
D) $5\sqrt{2}$ u E) $3\sqrt{10}$ u

28. Calcula la longitud del radio de la circunferencia:



A) 40 u B) 42 u C) 29 u
D) 30 u E) 37 u

29. En la figura, R = 7, OA = 25. Halla la ecuación de la circunferencia.



A) $(x + 24)^2 + (y - 7)^2 = 7^2$

B) $(x + 24)^2 + (y + 7)^2 = 7^2$

C) $(x - 24)^2 + (y + 7)^2 = 7^2$

D) $(x - 24)^2 + (y - 7)^2 = 7^2$

E) $(x - 12)^2 + (y - 24)^2 = 7^2$

30. En la figura, OP = 12 y O es centro. Halla la ecuación de la circunferencia.

y
O
30°
P
x

A) $x^2 + y^2 = 12$

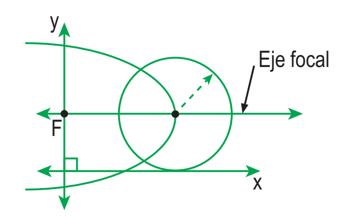
B) $x^2 + y^2 = 6$

C) $x^2 + y^2 - 12y = 0$

D) $x^2 + y^2 + 12x = 0$

E) $x^2 + y^2 - 12x = 0$

31. De la figura, la ecuación de la circunferencia es $\mathscr{C}$: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. Si F es el foco, halla la ecuación de la parábola.



A) $(y-1)^2 = 16(x-4)$ B) $(y-2)^2 = -16(x-4)$

C) $(y-2) = 16(x-4)^2$ D) $(y-4)^2 = 4(x-2)$

E) $(y-2)^2 = 9(x-2)$

32. La longitud del lado recto de una parábola, cuyo eje focal es paralelo al eje de ordenadas, es 20 u. Las coordenadas del foco son $(-3; -2)$ y su vértice está arriba del foco. Halla la ecuación de la parábola.

A) $(x-3)^2 = 10(y-3)$

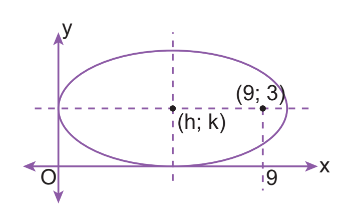
B) $(x+3)^2 = -20(y-3)$

C) $(x+3)^2 = 20(y+3)$

D) $(x-3)^2 = 20(y-3)$

E) $(x-3)^2 = 10(y+3)$

33. Una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados es tangente a estos. Si su foco de mayor abscisa es (9; 3), halla la ecuación general de la elipse.



A) $3x^2 + 25y^2 + 90x + 150y - 225 = 0$

B) $x^2 + 9y^2 + 9x - 170y + 625 = 0$

C) $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 255 = 0$

D) $9x^2 - 25y^2 - 150x - 90x + 632 = 0$

E) $25x^2 - 9y^2 - 90x - 150y - 225 = 0$

34. La ecuación de una elipse es $7(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 112$. Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por una de los extremos del lado recto, interseca al eje y en (0; p), $p > 0$ y su pendiente es positiva.

A) $2x - 5x - 10 = 0$

B) $5x - 3y - 9 = 0$

C) $3x + 4y - 9 = 0$

D) $2x - 7y - 4 = 0$

E) $3x - 4y + 15 = 0$

Resolución de problemas

35. Calcula la ecuación de una elipse con un vértice en el origen de coordenadas y eje focal en el eje x. Dicho vértice dista 1 u de un foco y 25 u del otro foco, además la abscisa del centro es un número positivo.

A) $\dfrac{(x-13)^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ B) $\dfrac{(x-12)^2}{144} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

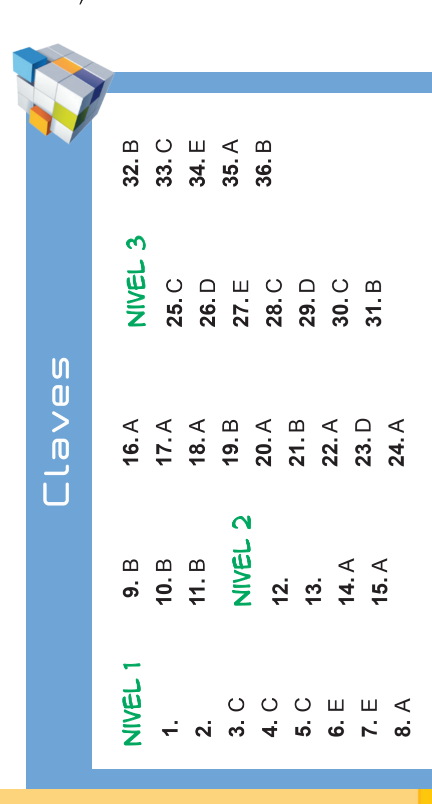
C) $\dfrac{(x+13)^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ D) $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{169} = 1$

E) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-13)^2}{169} = 1$

36. Calcula la ecuación de la directriz de la parábola:
$y^2 - 4x - 10y + 17 = 0$

A) $x = 1$ B) $x = -3$ C) $x = 3$

D) $x = 2$ E) $x = -2$





Aplicamos lo aprendido



TEMA 5: LÍMITES Y DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Calcula:

$A = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

A) −1 B) 0 C) 1
D) 2 E) −2

2 Calcula:

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 9x}{x}$

A) 3 B) 9 C) 5
D) 15 E) 7

3 Calcula:

$B = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 \cos x}$

A) −1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

4 Calcula:

$C = \lim_{x \to 0} \frac{p \tan px}{q \tan qx}$

A) 0 B) $\frac{p}{q}$ C) $\frac{p^2}{q^2}$
D) 1 E) $\frac{q}{p}$

5 Calcula:

$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^3 - 1}$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0
D) $\frac{1}{3}$ E) −1

6 Si: $f(x) = \frac{67x}{\operatorname{sen} 2010x}$, calcula: $\lim_{x \to 0} f(x)$

A) $\frac{1}{30}$ B) $\frac{1}{15}$ C) 30
D) $\frac{1}{20}$ E) $\frac{1}{10}$

7 Calcula:

$$M = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x}$$

A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) -2

8 Si: $f(x) = \text{sen}^2 x$, calcula:

$$f'\left(\frac{127°}{2}\right)$$

A) $\frac{3}{5}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$
D) $-\frac{4}{5}$ E) 0

9 Si: $f(x) = \text{sen}2x\text{sen}3x$, calcula:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

A) 2 B) 1 C) 0
D) -1 E) -2

10 Si:
$f(x) = \text{sen}x + \text{sen}3x + \text{sen}5x + \text{sen}7x + ... + \text{sen}21x$,
calcula:
$f'(0)$

A) 21 B) 0 C) 1
D) 441 E) 121

11 Calcula:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\tan 4x - \tan 2x}{\tan 3x - \tan x}$$

A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

12 Marca lo incorrecto:

A) $y = \cot x - \tan x \Rightarrow y' = -4\csc^2 2x$

B) $y = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x \Rightarrow y' = 3\cos 3x$

C) $y = \csc x - \cot x \Rightarrow \ y' = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2}$

D) $y = \cos x(2\cos 2x - 1) \Rightarrow y' = -3\text{sen}3x$

E) $y = \cos^4 x - \text{sen}^4 x \Rightarrow y' = 2\text{sen}2x$

13 Calcula:

$$\lim_{x \to 1} (1 - x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

A) $\pi + 2$ B $\pi/2$ C) $2/\pi$
D) $\pi - 2$ E) π

14 Calcula:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

A) 5 B) 1 C) 3
D) 2 E) 4

Claves

1. C	3. C	5. D	7. B	9. A	11. B	13. C
2. B	4. C	6. A	8. C	10. E	12. E	14. D

Practiquemos



NIVEL 1

Comunicación matemática

1. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}3x}{x} = 3$ ( )

II. $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ( )

III. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x + \pi) = -1$ ( )

2. Relaciona según corresponda:

$\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}x + 2$ 　　 0

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1$ 　　 2

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}$ 　　 1

Razonamiento y demostración

3. Calcula:

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{\text{sen}\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{a}{2}}$$

A) $-4\text{sen}\frac{a}{2}$　B) $4\text{sen}\frac{a}{2}$　C) $4\cos\frac{a}{2}$

D) $-4\cos\frac{a}{2}$　E) $-2\text{sen}\frac{a}{2}$

4. Calcula:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}4x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\text{sen}x}$$

A) 8　B) 6　C) 4,25

D) 4,5　E) 4,8

5. Determina:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B) $\frac{1}{2}$　C) $-\frac{1}{2}$

D) -1　E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Efectúa:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x - 0{,}5\pi}{\cos x}$$

A) 1　B) -1　C) 0

D) 2　E) -2

7. Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x - \text{sen}2x}{\text{sen}x}$$

A) -1　B) -2　C) 0　D) 1　E) 2

8. Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{\text{sen}x - \text{sen}a}{\tan x - \tan a}$$

A) $\cos^3 a$　B) $\text{sen}^3 a$　C) $\cos^2 a$

D) $\text{sen}^2 a$　E) 1

9. Si $G(x) = 1 - 2\text{sen}^2 x\cos^2 x$, calcula: $G'(x)$

A) $\text{sen}4x$　B) $-\text{sen}4x$　C) $-\frac{1}{4}\text{sen}4x$

D) $-\cos 4x$　E) $-\text{sen}2x$

10. Si $f(x) = 1 + \text{sen}x + \cos x$,
calcula: $f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x)$

A) 1　B) $2\text{sen}x$　C) $2\cos x$

D) $-2\text{sen}x$　E) $-2\cos x$

NIVEL 2

Comunicación matemática

11. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $f(x) = \text{sen}3x \Rightarrow f'(x) = 3\cos 3x$ ( )

II. $f(x) = \text{sen}x\cos x \Rightarrow f'(x) = \cos 2x$ ( )

III. $f(x) = 1 - 2\text{sen}^2 x \Rightarrow f'(x) = -2\text{sen}2x$ ( )

12. Relaciona según corresponda.

$f(x) = \cos x$ 　　 $f'(x) = \sec^2 x$

$f(x) = \tan x$ 　　 $f'(x) = -\text{sen}x$

$f(x) = \cot x$ 　　 $f'(x) = -\csc^2 x$

Razonamiento y demostración

13. Calcula:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x + 1}{(x-1)^2}$$

A) $\frac{\pi^2}{2}$　B) π^2　C) $\frac{\pi^2}{4}$　D) $\frac{\pi}{2}$　E) $\frac{\pi}{4}$

14. Calcula:

$$\lim_{x\to a} \frac{\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 a}{\text{sen}(2x - a) - \text{sen}a}$$

A) $\cos a$　B) $\tan a$　C) $\cot a$　D) $\sec a$　E) $\text{sen}a$

15. Halla:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\tan 5x}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{10}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

16. Si $F(x) = 4\text{sen}^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, calcula: F'(x)

A) $-6\cos 2x\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

B) $-6\cos^2 x\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

C) $-6\text{sen}^2 x\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

D) $-6\text{sen}^2 x\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

E) $6\cos^2 x\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

17. Si
$H(x) = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + 1$,
calcula: H'(x)

A) $2\text{sen}^5 x$ B) $-2\text{sen}^5 x$
C) $2\text{sen}^6 x$ D) $2\text{sen}x$
E) $\text{sen}^5 x$

18. Si: $G(x) = x^3\text{sen}x + 3x^2\cos x - 6\cos x - 6x\text{sen}x$,
calcula: G'(x)

A) $x^3\cos x$ B) $x^3\text{sen}x$
C) $-x^3\cos x$ D) $-x^3\text{sen}x$
E) $x^2\cos x$

19. Si $J(x) = \text{sen}^6 x + \cos^6 x + 1$,
halla el valor de A; sabiendo que
$J'(x) = A\text{sen}4x$.

A) $-\frac{3}{2}$ B) –12 C) 10
D) 16 E) $-\frac{3}{4}$

20. Si $G(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 4x}{16}$, determina: G''(x)

A) $2\text{sen}^2 3x$ B) $2\text{sen}^2 x$
C) $2\text{sen}^2 2x$ D) $2\text{sen}^2 6x$
E) $2\text{sen}^2 4x$

NIVEL 3

Comunicación matemática

21. Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. $\lim_{x \to 1} \frac{\text{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{2}{3}$ ( )

II. $\lim_{x \to 2}\left[\sec\frac{\pi x}{2} - 2x\right] = -5$ ( )

III. $\lim_{x \to 0}\left[\frac{3\text{sen}\pi x - \text{sen}3\pi x}{x^4}\right]\tan x = 4\pi^3$ ( )

22. Relaciona según corresponda:

$\lim_{x \to 0} \text{arcsen}x$	1
$\lim_{x \to 0} \arccos x$	0
$\lim_{x \to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x}$	$\frac{\pi}{2}$

Razonamiento y demostración

23. Calcula:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\text{sen}x} - \cot x\right)$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

24. Halla:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 4x}{x\,\text{sen}3x}$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{16}{3}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

25. Determina:

$$\lim_{x \to \theta} \frac{\cos x - \cos\theta}{\text{sen}x - \text{sen}\theta}$$

A) $-\tan\theta$ B) $-\cot\theta$ C) $\tan\theta$
D) $\cot\theta$ E) 1

26. Si: $F(x) = \text{sen}x\,\text{sen}2x\,\text{sen}3x$,
calcula: $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) 0

27. Si $F(x) = 16\text{sen}^5 x - 20\text{sen}^3 x$, calcula:
A + B, sabiendo que:
$F'(x) = A\cos x + B\cos 5x$

A) 0 B) 10 C) –10
D) 12 E) –12

28. Si: $f(x) = \text{sen}x + 2\text{sen}2x + 3\text{sen}3x + \ldots + n\text{sen}nx$,
calcula: f'(0)

A) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B) $\frac{n(n+1)}{2}$

C) $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

D) $\frac{n(n-1)}{2}$

E) $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$

29. El área de la región comprendida por la curva y = senx y el eje x en [0; π] se calcula de la siguiente manera:

$$S = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{\pi}{n}\left(\text{sen}\frac{\pi}{n} + \text{sen}\frac{2\pi}{n} + \text{sen}\frac{3\pi}{n} + \ldots + \text{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$

Calcula: S

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Claves

NIVEL 1	8. A	15. C	22.
1.	9. B	16. A	23. C
2.	10. A	17. E	24. C
3. A	NIVEL 2	18. A	25. A
4. A	11.	19. A	26. C
5. A	12.	20. C	27. A
6. B	13. A	NIVEL 3	28. A
7. A	14. E	21.	29. B

MARATÓN Matemática

Calcula una solución para el siguiente sistema de ecuaciones.

$a + b = \dfrac{2\pi}{3}$ ... (I)

$\sec a + \sec b = 1$ ... (II)

Si $a - b \in \langle 180°; 270° \rangle$

Resolución:

- De la ecuación (II):

$$\frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} = 1$$

$$\cos b + \cos a = \cos a \cos b$$

$$2 \times (\cos b + \cos a) = 2 \times (\cos a \cos b)$$

$$2 \times 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

- Por dato (I), sabemos: $a + b = 120°$

$$4 \times \cos(60°)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \cos(120°) + \cos(a-b)$$

$$4\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right) - 1$$

$$2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

$$4\cos^2\left(\frac{a-b}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - 3 = 0$$

$$\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - 3\right)\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + 1\right) = 0$$

La ecuación admite solución para:

$$\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a-b}{2} = 120° \Rightarrow a - b = 240°$$

Luego, tenemos:

$a + b = 120°$, $a - b = 240°$ $\Rightarrow$ $a = 180°$, $b = -60°$

1. Halla el intervalo de senx, si:

$x \in \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

A) $\left\langle \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right]$ C) $\left[\frac{1}{3}; 1 \right\rangle$

D) $\left[\frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{3}; 1 \right]$

2. Calcula el dominio de la siguiente función:

$y = 5\arcsen(2x - 5) + \frac{3\pi}{4}$

A) $\langle -1; 0] \cup [1; 2\rangle$ B) $\langle -1; 1\rangle$ C) $\langle 2; 3\rangle$

D) $\langle -1; 2]$ E) $[2; 3]$

3. Calcula el rango de la siguiente función:

$y = \arccos(\tan x);\ x \in \left\langle \frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

A) $[-\pi; 0\rangle$ B) $\left\langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ C) $\langle 0; \pi\rangle$

D) $\langle -\pi; \pi\rangle$ E) $[0; \pi\rangle$

4. Halla la solución general de la siguiente ecuación:

$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1$

A) $x = 6n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$ B) $x = 9n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$ C) $x = \frac{9}{2}n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

D) $x = 3n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$ E) $x = \frac{3}{2}n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

5. La ecuación de una parábola es:

$x^2 - 3y - 6x - 9 = 0$

Halla el vértice de la parábola.

A) (3; 6) B) (6; 3) C) (–3; 6)

D) (–3; –6) E) (3; –6)

6. El vértice de una parábola es (3; 2) y su directriz es $y = -1$.

Calcula la ecuación de la parábola.

A) $x^2 - 9x - 12y + 30 = 0$

B) $x^2 + 6x - 12y + 24 = 0$

C) $x^2 + 9x + 12y + 33 = 0$

D) $x^2 - 6x - 12y + 33 = 0$

E) $x^2 - 6x + 12y + 24 = 0$

7. Una elipse, cuyo ejes son paralelos a los ejes coordenados, tiene sus dos vértices sobre las rectas $x = 1$ y $x = 9$. Su centro está sobre la recta L: $y = x + 2$ y pasa por el punto P(2; 6).

Calcula la ecuación de la elipse.

A) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{16/7} = 1$

B) $\frac{(x-5)^2}{16/7} + \frac{(y+7)^2}{7/16} = 1$

C) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

D) $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{7} = 1$

E) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{16/7} = 1$

8. En un triángulo cuyos lados miden 14 m; 16 m; 18 m se traza la mediana relativa al lado que mide 16 m.

Determina el coseno del ángulo comprendido entre el lado de 14 m y la mediana.

A) $\frac{37}{42}$ B) $\frac{41}{45}$ C) $\frac{41}{49}$

D) $\frac{37}{41}$ E) $\frac{41}{47}$